Contributi di Ricerca in Psicologia e Pedagogia
Sezione di Psicologia e Pedagogia del Dipartimento di Filosofia
Università di Genova (1990), pp. 59-76

Alberto Greco

Processi cognitivi fondamentali nella rappresentazione e soluzione di problemi aritmetici: un modello simulativo

Viene presentato un modello della rappresentazione dei problemi aritmetici che condivide l'impostazione di Kintsch e Greeno (1985), in quanto la rappresentazione è vista in diretta relazione con la comprensione del testo e a diversi livelli di astrazione, ma che intende superare alcune inadeguatezze di quel modello. In particolare, si ritiene necessario che, se il sistema di rappresentazione usato fa riferimento a schemi che manipolano insiemi, esso tenga conto delle caratteristiche psicologiche degli insiemi ed abbia una componente iconica, che è un aspetto importante dei modelli mentali. Il modello proposto configura un sistema di rappresentazione in cui elementi iconici e proposizionali si integrano a diversi livelli e viene esemplificato in dettaglio con riferimento ad alcuni problemi aritmetici.

1. Introduzione

La presente indagine fa parte di un programma che si propone, in generale, di analizzare alcuni processi cognitivi utilizzati nella soluzione di problemi quando le informazioni rilevanti vengono presentate attraverso testi. In particolare, in questo articolo vengono presi in considerazione alcuni sistemi di rappresentazione utilizzati nella soluzione di problemi aritmetici.

Le ricerche di questo tipo non sono limitate alle tematiche riguardanti la soluzione di problemi in senso classico (alla Newell & Simon, ad esempio). Ciò che interessa non sono tanto o soltanto le "strategie" di approccio al problema o di soluzione dello stesso, quanto il modo in cui queste strategie si sviluppano dalla comprensione dell'informazione linguistica e dal modo in cui il problema è *rappresentato*. Dopo i primi tentativi di Simon e Hayes (1976), questa impostazione si deve soprattutto al lavoro di Kintsch e Greeno (1985) e collaboratori (Riley, Greeno, Heller, 1983; Dellarosa et al., 1988), che hanno sviluppato, a partire da una teoria della comprensione del testo, un modello della rappresentazione di problemi aritmetici.

Un modello alternativo è quello sviluppato da Briars e Larkin (1984), ma esso presenta alcuni svantaggi che non lo rendono adatto, a nostro parere, a costituire il punto di partenza per lo sviluppo di un nuovo modello[1] .

[1] Gli svantaggi di questo modello possono così essere riassunti: a) esso non è inserito in una teoria generale della comprensione e quindi usa un sistema di rappresentazione ritagliato *ad hoc* per gli specifici problemi aritmetici; b) il sistema di rappresentazione usato ha l'attrattiva di essere legato all'azione concreta, in quanto i problemi sono risolti attraverso semplici azioni di conteggio e spostamento di elementi fra insiemi; tuttavia il modello non rende conto di come le rappresentazioni concrete si integrino con quelle più astratte a livelli di comprensione successiva; c) non fa riferimento a schemi ma è implementato facendo uso esclusivo di *sistemi di produzione* (Newell e Simon, 1972), che costituiscono uno strumento troppo grezzo per simulare le elaborazioni e gli scambi di informazione che riguardano la memoria di lavoro e quella semantica.

Anche il tema principale della presente ricerca riguarda il modo in cui a partire da un testo viene ricavata una rappresentazione del problema. Le innovazioni proposte riguardano le modalità di rappresentazione degli elementi concettuali utilizzati nella soluzione. Data l'importanza del modello di Kintsch e Greeno (d'ora in poi KG) quale punto di partenza, esso verrà descritto in dettaglio nella prossima sezione.

2. Il modello KG

Kintsch e collaboratori hanno sviluppato la loro teoria da un modello che aveva inizialmente per oggetto la comprensione di testi in generale (Kintsch e Van Dijk, 1978; Van Dijk e Kintsch, 1983).

Secondo il modello KG, il significato di un testo viene inizialmente rappresentato tramite una serie di proposizioni legate fra loro da una certa struttura. Se tale *struttura proposizionale* riguarda i legami spiccioli fra le singole proposizioni, viene detta *microstruttura*; se invece è ad un livello più globale, riguardando il senso generale del testo, viene detta *macrostruttura*. La comprensione del testo è vista come la costruzione nella STM o memoria di lavoro di rappresentazioni che consentano di attribuire ad ogni elemento del messaggio una relazione coerente con il resto.

Anche quando il processo di costruzione della struttura proposizionale del testo-base ai due livelli (micro e macro) è completato, non si può ancora parlare di una vera e propria comprensione: la teoria assume che venga contemporaneamente attivato nella memoria di lavoro il cosiddetto "modello situazionale" (*situation model*), che rappresenta i fatti a cui si riferisce il testo in generale, indipendentemente da come è formulato, previa integrazione con le conoscenze già presenti e con l'eventuale inferenza di informazioni nuove. L'attivazione del modello situazionale è controllata dalle conoscenze generali, le aspettative, gli scopi del soggetto, cioè da strutture cognitive che possono essere descritte in una parola come *schemi* (molto simili, come viene esplicitamente detto, ai *frames* di Minsky, 1978, o agli *scripts* di Schank e Abelson, 1977). Come si sa, la caratteristica tipica degli schemi o frames è di avere una parte fissa ed una variabile: la prima rappresenta le conoscenze e le aspettative sulla situazione, la parte variabile contiene le specifiche informazioni nuove ed è costituita da un certo numero di caselle (*slot*) che vengono man mano riempite (*instanziate*) in base alle informazioni contenute nel testo.

Secondo il modello KG, dunque, la comprensione non si limita alla rappresentazione del testo-base né si assume che quest'ultimo venga integrato e arricchito sulla scorta delle conoscenze precedenti, ma si sostiene che la rappresentazione del testo - compiuta a sé - viene continuamente confrontata con il modello situazionale presente contemporaneamente nella memoria di lavoro. Questo implica, fra l'altro, che il modello deve tener conto delle limitazioni delle risorse cognitive ed in particolare di quelle della memoria di lavoro.

Il modello KG è stato applicato alla comprensione e soluzione dei cosiddetti "word problems", cioè di quei problemi aritmetici o matematici che utilizzano descrizioni verbali, talora formulati come piccole storie con personaggi, scopi, ecc. Kintsch e coll. hanno evidenziato che in questo tipo di testi il compito è semplice ma significativo e ben definito; inoltre lo scopo di chi legge è chiaro. Anche se le strategie richieste per la sua comprensione sono particolari (i bambini devono porsi scopi particolari e partire da presupposti particolari, diversi da quelli che ad esempio userebbero leggendo una favola), secondo questi autori le caratteristiche del processo di comprensione di questi testi sono uguali a quelle generali sopra delineate. Anche qui, quindi, si assume che venga ricavata da una parte una rappresentazione del testo-base, fatta di proposizioni atomiche, e dall'altra una rappresentazione astratta del problema (il modello situazionale, che qui viene chiamato "modello del problema"). Dal momento che il modello distingue chiaramente gli aspetti della comprensione linguistica e delle conoscenze concettuali (aritmetiche) richieste per risolvere i problemi, esso è stato concepito in special modo per aiutare a stabilire a quale dei due fattori siano da attribuire le difficoltà incontrate dai bambini. In certi casi, se nel modello vengono inserite delle rappresentazioni errate del significato di alcune parole-chiave, questo fornisce risposte sbagliate simili a quelle dei soggetti (Dellarosa et al., 1988).

Nella tav. 1 sono forniti alcuni esempi di problemi usati da Kintsch e coll. Questi problemi hanno la caratteristica di poter essere risolti con un'unica operazione di addizione o sottrazione.

Considereremo adesso in sintesi il funzionamento del processo di comprensione secondo il modello KG. Sulla base delle frasi contenute nel testo vengono ricavate delle proposizioni e viene attivato un modello del problema. La microstruttura e la macrostruttura coincidono perché in questo tipo di testi normalmente non vi sono elementi ridondanti da trascurare. Sia per costruire la struttura proposizionale che per il modello del problema vengono utilizzati *schemi* che, per il tipo di problemi di cui ci si occupa, riguardano sempre proprietà e relazioni di *insiemi*. Ogni volta che viene rappresentato un insieme, viene attivato uno schema le cui caselle sono: *oggetto* (nome degli elementi che costituiscono l'insieme, ad es. "palline"), *quantità* (numero, oppure "qualche", "quanti", ecc.), *specificazione* (chi lo possiede, dove, quando), *ruolo* (è un insieme di partenza, trasferito o risultante? è un sottoinsieme? ecc.).

A livello di costruzione delle proposizioni, sono usati schemi (detti, appunto, *schemi proposizionali*) del tipo AVERE (X,Y) (dove X è la persona che ha e Y l'oggetto) o DARE (X1, X2, Y). A livello superiore, si hanno schemi più generali che vengono usati per rappresentare le relazioni fra insiemi corrispondenti alle proposizioni del testo. Ad esempio, DARE o RICEVERE attivano lo schema del TRASFERIMENTO, che richiede tre insiemi: quello di partenza, quello degli oggetti che vengono trasferiti a chi possiede l'insieme di partenza (TRANSFER-IN) o a chi possiede l'insieme risultante (TRANSFER-OUT), e infine l'insieme risultante. Le quantità numeriche sono anch'esse valori che riempiono degli *slot*; quando anziché specificare un numero si parla di "alcuni", viene creata la rappresentazione di un insieme ma il valore inserito nello slot relativo alla quantità sarà indeterminato; se si chiede "quanti...?" viene rappresentato un insieme e viene stabilito lo scopo di trovarne la quantità. Queste informazioni non sono contenute nel testo-base ma sono inferite da esso e quindi fanno parte del "modello del problema".

Per attivare gli schemi giusti e riempire effettivamente gli slot degli schemi con le informazioni ricavate dal testo, il modello KG prevede l'uso di alcune strategie, formulate come *sistemi di produzione* (Newell e Simon, 1972), del tipo MAKE-SET (rappresenta un insieme), MAKE-TRANSFERSET (rappresenta un insieme di partenza da cui vengono trasferiti oggetti ad un altro insieme), ecc. Queste strategie sono schemi d'azione

Tav. 1 - Alcuni esempi di problemi usati nel modello KG
(Riley, Greeno, Heller, 1983; Van Dijk e Kintsch, 1983; Kintsch e Greeno, 1985)

CAMBIAMENTO

1.Joe aveva 8 palline.
Quindi ha dato 5 palline a Tom.
Quante palline ha ora Joe?

2.Joe aveva 3 palline.
Quindi Tom gli ha dato ancora alcune palline.
Ora Joe ha 8 palline.
Quante palline gli ha dato Tom?

COMBINAZIONE

3.Joe e Tom insieme hanno 8 palline.
Joe ha 3 palline.
Quante palline ha Tom?

4.Joe ha 3 palline.
Tom ha 5 palline.
Quante palline hanno insieme?

CONFRONTO

5.Joe ha 8 palline.
Tom ha 5 palline.
Quante palline ha Joe in più di Tom?

6.Joe ha 8 palline.
Tom ha 5 palline in meno di Joe.
Quante palline ha Tom?

che consentono in sostanza la generalizzazione dall'informazione testuale alla struttura proposizionale e dalle prime due al modello del problema, e - in ultima analisi - alla pianificazione della soluzione. Ad esempio TRASFERIMENTO (sia come TRANSFER-IN che come TRANSFER-OUT) attiva MAKE-TRANSFERSET che assegna ai vari insiemi del testo il ruolo di insieme di partenza, di trasferimento e risultante, basandosi sul fatto che l'insieme posseduto dall'individuo che dà è quello di partenza e così via.

Sulla base della rappresentazione del problema che abbiamo descritto, il soggetto è in grado di applicare gli operatori aritmetici appropriati, cioè SOMMA o SOTTRAI, anch'essi rappresentati come produzioni, quindi attivati se si verificano certe condizioni. Ad esempio viene attivato SOTTRAI se la rappresentazione del problema contiene un insieme più grande (SUPERSET) ed uno più piccolo (SUBSET) le cui quantità sono note ed un altro sotto-insieme la cui quantità è sconosciuta.

3. Requisiti di un nuovo modello di rappresentazione dei problemi aritmetici

Come si è detto, il modello KG ha avuto il merito di puntare l'attenzione, prima che sulle strategie di soluzione del problema, sulle strategie di rappresentazione e comprensione dello stesso partendo direttamente dalla sua formulazione verbale. Ad esempio risulta chiaro che la scelta dell'operazione aritmetica da usarsi per la soluzione non è il primo passo ma l'ultimo nel processo di rappresentazione del problema. Un altro aspetto positivo del modello è il fatto di evidenziare come la rappresentazione avvenga a diversi livelli di astrazione via via sempre meno legati allo specifico testo e sempre più contenenti informazioni inferite dalle conoscenze e dalle attese precedenti.

Il modello che qui viene proposto è stato sviluppato con lo scopo di mantenere queste caratteristiche ma di superare alcuni limiti del modello KG, sia per quanto riguarda le strutture generali di rappresentazione di cui fa uso, sia per quanto concerne le strutture richieste per la specifica situazione della comprensione e soluzione di problemi aritmetici.

a) Strutture generali di rappresentazione

L'inconveniente maggiore a cui va incontro il sistema fin qui descritto è di ricavare una rappresentazione esclusivamente *proposizionale* della situazione descritta nei problemi[2] , senza far riferimento a quel tipo di rappresentazione più concreta, che riflette lo stato delle cose a cui si riferisce e che è stato variamente denominato - con diverse sfumature di significato - "quasi-pittorico" (Kosslyn, 1980), "dell'immagine spaziale" (Anderson, 1983), "analogico" (Pylyshyn, 1984), del "modello mentale" (Johnson-Laird, 1983, 1986). Nel seguito adotteremo il termine "iconico" per riferirci ad elementi di una rappresentazione la struttura dei quali riflette in maniera specifica (non generale) e diretta (non arbitraria) lo stato di cose rappresentato; questo uso è molto simile a quello di Johnson-Laird ma il termine è stato preferito a "modello" per sottolineare la funzione che ciascun simbolo (icona) ha, che è al tempo stesso concreta (sta per un particolare elemento) e astratta (sta per uno qualunque degli elementi che condividono stessi attributi).

Le rappresentazioni iconiche di cui parliamo non corrispondono a quelle del modello di Briars e Larkin (1984) (vedi nota 1), che fa sì uso di rappresentazioni concrete simili a schemi d'azione, ma le semplifica eccessivamente e non rende conto del fatto che esse devono necessariamente combinarsi - anche a livelli poco astratti - con quelle proposizionali. Ad esempio, quando la rappresentazione concreta o iconica di un insieme comincia ad essere sviluppata, anche semplicemente con le indicazioni del numero di elementi che contiene o delle sue trasformazioni in tempi successivi, non si può non introdurre in essa elementi proposizionali; d'altro canto, nessuna rappresentazione può essere puramente proposizionale senza punti di aggancio a simboli il cui riferimento è concreto.

L'importanza di tener conto dell'esistenza di due tipi di rappresentazione nasce dunque dal fatto che essi non soltanto coesistono ma interagiscono e interferiscono l'uno sull'altro. Un modello realistico deve contenere una descrizione di come queste strutture si integrino. Nello specifico campo della soluzione di problemi, la comprensione di come la componente iconica funzioni e si integri con quella proposizionale ha, fra l'altro, un rilevante valore dal punto di vista delle strategie educazionali (v. ad es. Klahr, 1976; Greeno, 1987; Craighero, 1971).

---

[2] Solo Johnson-Laird (1983) ha esplicitamente mosso questa critica al modello di Kintsch. Del resto, nella maggior parte delle rassegne dedicate alla rappresentazione dei problemi matematici (ad es. Resnick e Ford, 1981; Ginsburg, 1983; Schoenfeld, 1985) non si fa riferimento a sistemi di rappresentazione diversa da quella proposizionale e, laddove lo si fa (Davis, 1984; Silver, 1987; Greeno, 1987), si tratta di accenni sporadici e marginali. Lo stesso Kintsch (1988) ha riconosciuto la "desiderabilità" di un ampliamento del suo modello con l'uso di rappresentazioni non proposizionali, ma mostra di ritenere che il loro studio sia subordinato a quello delle proposizionali, il che ci sembra discutibile.

b) Strutture domain-dependent

Il modello KG usa il concetto di *insieme* come "primitivo", nel senso che gli schemi e le strategie di comprensione hanno come argomenti degli insiemi, di cui non viene tuttavia detto come nascano e come siano a loro volta rappresentati. Di per sé questo non sarebbe un requisito essenziale, dal momento che in qualunque modello c'è sempre qualche struttura primitiva che viene data per scontata; tuttavia in questo caso è importante che la struttura di base venga analizzata in quanto è proprio a questo livello che si inseriscono i modelli mentali di cui si è parlato in precedenza. Di fatto l'analisi di come gli insiemi siano rappresentati a livello iconico (a parte la scarsa plausibilità di una struttura puramente proposizionale quale rappresentazione "naturale") non può essere trascurata se, come riteniamo, così facendo si perdono aspetti che riguardano anche il modo in cui gli stessi vengono usati.

Un altro inconveniente del sistema KG è costituito dal fatto che a volte viene fatto riferimento a insiemi che sono in intersezione come se fossero separati. Ad esempio, come si è visto, lo schema del TRASFERIMENTO richiede tre insiemi (quello di partenza, quello degli oggetti trasferiti, quello risultante) senza che ci sia modo di enucleare l'informazione, essenziale ai fini della comprensione, e che pure dovrebbe essere implicita nella stessa idea del trasferimento, che questi insiemi contengono in parte gli stessi elementi; per ottenere questa informazione, nel modello KG si è dovuto far intervenire uno schema supplementare per la rappresentazione delle relazioni "parte-tutto" (Riley et al, 1983, p.179). Questo inconveniente deriva dal fatto, appena discusso, che gli insiemi sono rappresentati soltanto in maniera proposizionale. A ciò si aggiunga il fatto che nel modello KG il passaggio dalla rappresentazione alla scelta dell'operazione aritmetica da usarsi per la soluzione avviene per semplice *pattern-matching*, e quindi il valore euristico del modello risulta impoverito per quanto riguarda la spiegazione delle procedure di comprensione.

4. Descrizione del nostro modello

Il nostro modello prevede teoricamente due moduli, che rispettivamente compiono il *parsing* e la *rappresentazione*; come nel modello KG, però, il *parsing* non è compiuto all'interno del modello stesso ma se ne utilizza il risultato, cioé la *rappresentazione proposizionale*. Quest'ultima ha un posto rilevante per il fatto che coesiste con le rappresentazioni più astratte: in altri termini, la rappresentazione del "testo-base" e quella del "modello del problema" sono separate ma contemporanee nella memoria di lavoro. Le strutture adottate per entrambe le rappresentazioni usano schemi, che nel secondo caso sono integrati con *schemi iconici*. Questa è una importante novità introdotta dal modello e vale dunque la pena di delinearne subito le caratteristiche.

Come si è visto, l'*insieme* è il mattone che costituisce la base per la comprensione dei problemi aritmetici; tuttavia occorre precisare che l'insieme da un punto di vista psicologico non segue la definizione puramente matematica. Dal punto di vista matematico, come è ben noto, l'unico requisito del concetto di "insieme" è che si possa stabilire con precisione quali elementi ne fanno parte, indipendentemente dalla loro affinità concettuale (un semplice elenco è sufficiente); dal punto di vista psicologico, tuttavia, il criterio di raggruppamento fa necessariamente uso di categorie concettuali: l'insieme costituito da 3 mele, 2 mattoni e 4 libri ha un senso matematico ma non psicologico. Dal momento che l'operazione cognitiva di rappresentazione di un insieme è subordinata alla rappresentazione concettuale, anch'essa avviene sulla base di somiglianze, analogie, funzioni comuni, prototipi, ecc. (v. ad es. Oden, 1987).

Lo schema iconico da cui si sviluppa la rappresentazione di un insieme nasce dunque dall'applicazione della funzione di "successione" di elementi concettuali omogenei: ad es. mela1, mela2, mela3...: mele. La scelta di un tale formato di rappresentazione può essere giustificata, fra l'altro, dalla nota difficoltà di concepire in termini intuitivi un insieme formato da un unico elemento o addirittura l'insieme vuoto. Un esempio molto semplice di rappresentazione dell'insieme "mele" in un modello proposizionale (usando la sintassi del LISP) potrebbe essere: (SETQ SET (QUOTE MELE)). Nel nostro modello una tale rappresentazione dovrebbe essere invece del tipo: (SETQ SET (QUOTE (m m m m))) dove il numero delle m è arbitrario. La differenza non è puramente formale, perché il modello manipola le liste che rappresentano gli insiemi come se fossero icone o elementi di un modello mentale e dunque il problema è compreso e risolto in maniera completamente diversa rispetto al modello KG.

D'altra parte, questo sistema di rappresentazione è perfettamente integrato in un sistema frame-like, in quanto gli insiemi così rappresentati sono argomenti che instanziano gli slot degli schemi rilevanti nel contesto. Nel nostro modello la comprensione si perfeziona via via attraverso cicli in cui le prospettive *top-down* e *bottom-up* si alternano: la costruzione e la manipolazione del modello mentale è influenzata dal tipo di schemi attivato ma a sua volta può influenzare l'attivazione e instanziazione degli schemi. Le rappresentazioni che vengono costruite, dunque, non sono quasi mai puramente proposizionali né puramente iconiche ma c'è una presenza e integrazione di elementi dei due tipi in misura variabile a seconda dei casi.

La struttura della memoria adottata nella realizzazione del modello corrisponde nelle linee generali a quella descritta da van Dijk e Kintsch (1983): data la limitatezza della memoria di lavoro e tenendo conto d'altra parte del fatto, sostenuto dall'evidenza empirica, che nella comprensione di un testo le informazioni immediatamente disponibili vanno oltre quelle elaborate attimo per attimo, viene contemplata una "memoria episodica del testo" che contiene le informazioni elaborate in precedenza in relazione al testo di cui si sta costruendo la rappresentazione. Questa memoria può essere concepita come una serie di *stack* in cui vengono man mano inserite le informazioni nuove spingendo quelle vecchie sempre più lontano. Nel modello KG la memoria di lavoro contiene soltanto un "pezzo" a qualunque livello di analisi (proposizione, schema o struttura che comprende più schemi), oltre a un certo numero di dati rimasti in sospeso in seguito all'analisi delle informazioni fino al momento ricevute. Nel nostro modello c'è un continuo passaggio da uno stack all'altro e quindi da quello contenente il testo-base a quelli contenenti i modelli iconico e proposizionale.

Descriveremo ora più in dettaglio il nostro modello analizzandone il funzionamento attraverso alcuni esempi. I problemi utilizzati per la simulazione comprendono alcuni di quelli del modello KG ma possono essere estesi anche a casi per la cui soluzione si devono usare le operazioni della moltiplicazione e divisione. Cominceremo utilizzando uno dei problemi descritti da Kintsch e Greeno (1985):

Joe aveva 3 palline.
Quindi Tom gli ha dato ancora alcune palline.
Ora Joe ha 8 palline
Quante palline gli ha dato Tom?

Per esporre le differenze fra il modello KG e il nostro, è necessario analizzare in dettaglio il procedimento dei due modelli.

Nel modello KG in seguito alla prima frase viene stabilita la rappresentazione dell' insieme S_1:

S_1: oggetto: p (palline)
quantità: 3
specificaz.: Joe, passato
ruolo: ?

Nella memoria di lavoro rimane la richiesta di conoscere il ruolo dell'insieme. Dopo la seconda frase, viene rappresentato un altro insieme S_2 e attivato lo schema del TRASFERIMENTO:

S_2 oggetto: p
quantità: indeterm.
specificaz.: Joe, passato, dopo S_1
ruolo: insieme trasferito

Ora può anche essere assegnato a S_1 il ruolo di insieme di partenza. Dopo la terza frase viene rappresentato l'insieme S_3:

S_3: oggetto: p
quantità: 8
specificaz.: Joe, ora
ruolo: insieme risultante

A questo punto viene anche attivato lo schema del TRANSFER-IN, con queste assegnazioni:

insieme di partenza: S_1
insieme trasferito: S_2
insieme risultante: S_3

Alla domanda posta dalla frase finale, viene rappresentato un insieme che corrisponde a S_2 e viene posto lo scopo di trovare tale insieme. La situazione (insieme di partenza e risultante conosciuti, insieme trasferito ignoto) corrisponde (nel senso del *pattern-matching*) ad una di quelle per le quali esiste una procedura di soluzione, che viene dunque attivata. Si noti che in questo caso, come si è accennato in precedenza, vengono rappresentati tre insiemi senza che sia anche rappresentato il fatto - essenziale per la soluzione - che essi contengono in parte gli stessi elementi (l'insieme S_3 è composto da S_1 e da S_2); si noti anche che la procedura di soluzione scatta in realtà per semplice *pattern-matching*, non come prodotto di un processo che si possa definire di

Tav. 2 - Rappresentazione proposizionale del problema 2

Testo	*Rappresentazione*	*Buffer*	*Commento*
- Joe	I_1 = Joe = J		*Viene rappresentato l'individuo J.*
aveva	TIME1 (HAVE (J, y?))	y?	*Viene attivato lo schema proposizionale dell'AVERE, che in termini generali ha la forma HAVE (x ,y) ove x= chi, y = che cosa. Nel buffer rimane la richiesta di conoscere y.*
3 palline.	P1: TIME1 (HAVE (J, 3p))		*Chiamiamo P1 la prima proposizione completata.*
- Quindi	TIME2 (X?)	P1, X?	*"Quindi", "ora" e simili sono indicatori di tempo successivo.*
Tom	I_2 = Tom = T	P1	
gli ha dato	TIME2 (GIVE (T, J, y?))	P1, y?	*Lo schema proposizionale del DARE ha la forma generale: GIVE (x1, x2, (n,y)) ove x1 = chi dà, x2 = a chi, n = numero, y = che cosa*
ancora alcune palline.	P2: TIME2 (GIVE (T, J, (SOME p)))	P1	
- Ora	TIME3 (X?)	P1, P2, X?	
Joe ha	TIME3 (HAVE (J, y?))	P1, P2, y?	
8 palline.	P3: TIME3 (HAVE (J, 8p))	P1, P2	
- Quante palline	GOAL (? , xp)	P1, P2, P3	
gli ha dato	P4: GOAL (TIME2 (GIVE (T, J, xp)))	P1, P2, P3	*A questo punto lo schema GIVE può essere completato perché la specificazione "Tom" nel contesto è pleonastica.TIME2 viene ricavato dal fatto che GIVE si uniforma alla proposizione P2 e quindi si riferisce al tempo 2.*
Tom?		P1, P2, P3, P4	

Tav. 3 - Corrispondenza fra le rappresentazioni proposizionali e quelle iconiche nel problema 2

Rappresentazione proposizionale	*Rappresentazione iconica integrata con quella proposizionale*		
P1: TIME1 (HAVE(J, 3p))	TIME1		$(3\ (P_j P_j P_j P_j))$
P2: TIME2 (GIVE (T, J, (SOME p))	GIVE: TIME2	$(?\ (P_t P_t P_t P_t)$	$3(P_j P_j P_j P_j))$
	TIME3/EQ	$(?\ [(?\ (P_j P_j P_j P_j)$	$3(P_j P_j P_j P_j)])$
	TIME3/EQ	$(?\ \ (P_j P_j P_j P_j$	$P_j P_j P_j P_j))$
P3: TIME3 (HAVE (J, 8p))	GIVE: TIME2	$(?\ (P_t P_t P_t P_t$	$3(P_j P_j P_j P_j))$
	TIME3/EQ	$(8\ [(?\ (P_j P_j P_j P_j)$	$3(P_j P_j P_j P_j)])$
	TIME3/EQ	$(8\ (P_j P_j P_j P_j$	$P_j P_j P_j P_j))$
P4: GOAL (TIME2 (GIVE (T, J, xp)))	GIVE: TIME2	(8 (GOAL $(P_t\ P_t\ P_t\ P_t)$	$3(P_j P_j P_j P_j))$
	TIME3/EQ	(8 [(GOAL $P_j\ P_j\ P_j\ P_j)$	$(3\ (P_j P_j P_j P_j)])$
	TIME3/EQ	$(8\ \ P_j P_j P_j P_j$	$P_j P_j P_j P_j))$

Nota: le *rappresentazioni equivalenti* sono indicate con /EQ

"comprensione" del problema in un senso accettabile del termine.

Descriveremo ora come procede il nostro modello. Il primo ciclo di analisi prevede l'intervento del modulo di *parsing*[3] per la costruzione di una rappresentazione proposizionale delle frasi attraverso l'uso di schemi che catturano i concetti primitivi espressi nel testo. La tavola 2 riporta in che modo vengano ricavate le rappresentazioni proposizionali, quali schemi vengono attivati e i contenuti del buffer di lavoro[4] nell'esempio considerato in seguito alla lettura di ciascuna frase.

Fino a qui il modello non procede in modo dissimile dal modello KG, ma a questo punto sulla base della rappresentazione proposizionale viene attivata una corrispondente rappresentazione iconica e vengono chiamati in causa schemi iconici che contribuiscono in maniera determinante alla costruzione del modello del problema e alla soluzione.

Come si vede nella tavola 3, la prima proposizione (P1) fa riferimento all'insieme delle palline di Joe: queste vengono rappresentate con un numero arbitrario di P in quanto il *numero* fa parte della rappresentazione proposizionale. Per numeri così piccoli, in realtà, la rappresentazione iconica può contenere - e probabilmente contiene - esattamente la quantità indicata, ma il modello ovviamente è concepito in termini più generali.

[3] Come si è detto in precedenza, l'implementazione effettiva di questo modulo non è compresa nel modello in quanto fornire una descrizione accurata delle strategie di parsing va ovviamente al di là della sua portata. Il modello non ha dunque una grammatica ma si è optato per una soluzione di "auto-apprendimento", nel senso che il sistema chiede all'operatore il collegamento fra le entrate lessicali e gli schemi proposizionali quando non ha conoscenze sufficienti per farlo.

[4] Si ricordi che il buffer di lavoro non comprende soltanto la memoria a breve termine ma anche le informazioni episodiche relative al testo accessibili negli stack proposizionale e iconico.

La proposizione P2 è quella che contiene l'informazione chiave per rappresentarsi il problema e capirlo. A questo punto viene attivato lo schema iconico del DARE, la cui forma generale è:

TIME(N) $(O_{x1}\ O_{x1}\ O_{x1}\ O_{x1})\ (O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2})$
TIME(N+i) $((O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2})\ (O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2}))$
ovvero: $(O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2}\quad O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2}\ O_{x2})$

per indicare che oggetti (O) che prima appartenevano all'individuo x1 vengono ad appartenere a x2. Nell'esempio, le variabili dello schema vengono instanziate sulla base della rappresentazione proposizionale (O=p, x1=J, x2=T). Qui vanno notate alcune cose:

a) per esprimere concetti complessi come il *dare* occorre far riferimento a momenti successivi nel tempo e quindi la rappresentazione iconica deve necessariamente combinarsi con elementi proposizionali;

b) la rappresentazione contiene inferenze: l'informazione che al tempo (N) anche Tom doveva avere delle palline non è contenuta esplicitamente nel testo;

c) la rappresentazione risultante può essere espressa in due modi alternativi, che indichiamo come *rappresentazioni equivalenti*; noi assumiamo che per la comprensione e soluzione del problema è essenziale che il soggetto sia in grado di "commutare" (porre alternativamente nella memoria di lavoro) con facilità fra due rappresentazioni equivalenti. Nel caso esemplificato, la rappresentazione di un unico insieme equivale a quella di due insiemi che contengono soltanto oggetti appartenenti allo stesso individuo. Nella rappresentazione iconica non sono necessarie specificazioni perché le relazioni fra le parti vengono "viste" semplicemente ponendole in corrispondenza, ma per una comprensione non soltanto intuitiva è necessario un ulteriore ciclo di analisi proposizionale;

d) la rappresentazione del problema a questo punto è virtualmente completa perché anche se mancano delle informazioni (quante palline ha ora Joe) si può già capire la natura del problema e come risolverlo.

P3 fornisce l'informazione mancante ed anche l'incognita espressa da P4 è già attesa. L'insieme di cui non si conosce la quantità viene marcato in modo speciale e indicato come GOAL. Tale insieme compare due volte, rappresentando prima le "palline di Tom", in seguito le "palline di Joe avute da Tom" e tali insiemi sono in corrispondenza.

La soluzione non viene raggiunta subito tramite l'attivazione meccanica di una procedura che si attagli alla situazione, ma prima devono essere compiute delle inferenze sulle quali si basa la scelta dell'operazione aritmetica da usarsi. Come non esiste un'unica procedura per la soluzione di uno stesso problema, così non si può pensare che vi sia un unico formato di rappresentazione usato da tutti i soggetti: è ovvio l'intervento, a questo proposito, di fattori relativi al soggetto, quali l'esperienza nello specifico problema, stili personali, ecc. In particolare, la rappresentazione che conduce alla soluzione può essere a diversi livelli di astrazione (a livello più o meno intuitivo) e può richiedere, come si è detto, uno o più cicli di analisi ulteriori con una "commutazione" fra diversi modelli del problema nei quali gli elementi iconici e proposizionali sono presenti in misura diversa e integrati in diverso modo.

Nel nostro modello sono state previste, senza pretendere di esaurire le possibilità, due modi di scelta dell'operazione aritmetica: uno di natura concreta, basato sul confronto fra rappresentazioni iconiche; l'altro più astratto e tipico di un livello di *expertise* superiore, basato sull'assunto che siano stati costruiti schemi delle operazioni, anch'essi di tipo iconico oppure proposizionale.

Nel procedimento concreto gli insiemi vengono messi in *corrispondenza*, in quello proposizionale gli insiemi vengono *specificati*. Come due insiemi vengano messi in corrispondenza è stato appena visto nell'esempio; in termini più formali, due insiemi possono essere messi in corrispondenza se uno dei due risulta da una trasformazione operata sull'altro[5] oppure se sono rappresentazioni equivalenti. Nell'esempio, l'inferenza viene compiuta dapprima "commutando" nella memoria di lavoro fra le due rappresentazioni equivalenti del TIME3 (le rappresentazioni alternative della separazione e dell'unione delle parti) per lasciarvi poi focalizzata la rappresentazione che contiene la parte o l'insieme la cui quantità è sconosciuta e tentare di porre in corrispondenza gli elementi di questa rappresentazione con le parti dell'altra di cui si conosce la quantità. Se l'operazione viene completata, cioè se si riesce a completare la corrispondenza senza che rimangano elementi nell'insieme focalizzato, allora questo è un sotto-insieme e dunque l'operazione risolutiva è la sottrazione della quantità minore dalla quantità maggiore. In caso contrario, l'operazione è la somma. (Ai problemi che richiedono le altre operazioni aritmetiche accenneremo più avanti).

Una variante del modello, che fa riferimento ancora a rappresentazioni iconiche ma non chiama in causa un'elaborazione concreta, adotta schemi delle operazioni del tipo esemplificato nella parte *a* della tav. 4.

Per compiere l'inferenza di natura proposizionale (tav. 4 *b*), invece, il modello sfrutta una importante caratteristica logica della rappresentazione degli insiemi e cioé il fatto che questi risultano delimitati dalla specificazione concettuale: l'aggiunta di attributi o specificazioni (intensione) diminuisce l'estensione di un insieme e viceversa la rimozione di specificazioni ne aumenta l'estensione. Le due parti sono distinte finché vengono indicate come palline di Joe "che ha ricevuto" e "che aveva prima"; la rimozione di queste specificazioni porta alla rappresentazione di un solo insieme (palline di Joe).

Nell'esempio in questione, lo schema integrato risultante dalle precedenti fasi di rappresentazione può essere utilizzato come pattern che si attaglia allo schema iconico della sottrazione (v.tav. 4 *c*) oppure essere integrato con nuovi elementi proposizionali (la specificazione degli attributi) per uniformarsi al corrispondente schema proposizionale (tav. 4 *d*). In quest'ultimo caso, poiché sono note le quantità di un insieme non specificato (P_j) e di uno specificato (P_j BEFORE), si può attivare solo lo schema della sottrazione, che richiede due argomenti, di cui appunto il primo non specificato e il secondo specificato. Il procedimento è diverso rispetto al modello KG ove il ruolo di super-insieme e di sotto-insiemi veniva assegnato agli insiemi menzionati dal testo per via computazionale[6] , non logica, e la procedura di soluzione si limitava a guardare in

[5] Questo avviene ad esempio nello schema del DARE, ove il primo insieme di (Ox_2) del TIME(N+i) risulta dalla diretta trasformazione di (Ox_1) del TIME(N).

[6] Ad esempio, il sistema di produzione implementato prevedeva che se un insieme aveva il ruolo di insieme di partenza nello schema del TRANSFER-IN, allora esso andava considerato come un sotto-insieme, come pure l'insieme trasferito, mentre l'insieme risultante era un super-insieme.

Tav. 4 - Schemi di operazioni aritmetiche e loro applicazione al problema 2

Operazione	
	a. Schema iconico
Somma	*(O O O O) + *(O O O O) = x((O O O O)(O O O O))
Sottrazione	**((O O O O)(O O O O)) - *(O O O O) = x(O O O O)
	b. Schema proposizionale
Somma	(N1,<insieme spec.>)+(N2,<insieme spec.>)=(x,<insieme>)
Sottrazione	(N1,<insieme>)-(N2,<insieme spec.>)=(x,<insieme spec.>)

Gli asterischi e le lettere N indicano quantità conosciute.

Rappresentazione integrata (vedi P4 nella tav. 3)

GIVE:	TIME2	(GOAL(P_t P_t P_t P_t) 3(P_j P_j P_j P_j))
	TIME3/EQ	(8 [(GOAL(P_j P_j P_j P_j) 3(P P_j P_j P_j)])
	TIME3/EQ (8	(P_j P_j P_j P P_j P_j P_j P_j))

c. Nuova rappresentazione iconica

** ((P_j P_j P_j P_j)(P_j P_j P_j P_j)) * (P_j P_j P_j P_j) ? (P_t P_t P_t P_t)

che si attaglia allo schema della sottrazione

d. Nuova rappresentazione proposizionale

TIME3/EQ (8 ((?, P_j GIVEN)(3, P_j BEFORE)))

TIME3/EQ (8 (P_j))

in cui sono rappresentati i tre insiemi

(8 (P_j))   (3, P_j BEFORE)   (x, P_j GIVEN)

che si attagliano allo schema della sottrazione

una tabella quali quantità fossero note e quali no senza che tale procedura fosse realmente collegata alla rappresentazione del problema.

5. Sviluppi del modello

Il modello proposto funziona con tutti i problemi usati nel modello KG. Nella tav. 5 è esemplificato come vengano rappresentati e risolti i problemi di *combinazione*, per i quali lo schema fondamentale è l'AVERE-INSIEME, e i problemi di *confronto*, che richiedono lo schema dell'AVERE-INPIU' (identico anche nel caso dell'"avere in meno").

Nel caso dell'AVERE-INSIEME lo schema, molto semplice, contiene le rappresentazioni equivalenti di due parti separate che possono essere viste come congiunte nello stesso tempo; il procedimento di soluzione è simile a quello considerato in precedenza. Lo schema dell'AVERE-INPIU' è più complesso in quanto implica che un insieme venga scomposto e la distinzione fra le parti scaturisce dal fatto che, mettendo in corrispondenza i due sottoinsiemi con un altro insieme, una è corrispondente e l'altra no:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{TIME(N)/EQ} & (\,O_{x1}\,O_{x1}\,O_{x1} & & O_{x1} & O_{x1} & O_{x1}) \\
\text{TIME(N)/EQ} & ((O_{x1}\,O_{x1}\,O_{x1}) & & (O_{x1} & O_{x1} & O_{x1})) \\
 & .\quad .\quad . & & . & . & . \\
 & .\quad .\quad . & & . & . & . \\
 & .\quad .\quad . & & . & . & . \\
 & (O_{x2}\,O_{x2}\,O_{x2} & & . & . & . \\
 & & & . & . & . \\
 & & & . & . & . \\
 & & \text{MORE} & (O_{x1} & O_{x1} & O_{x1}) \\
 & & \text{LESS} & (O_{x2}{}^{*} & O_{x2}{}^{*} & O_{x2}{}^{*})
\end{array}
$$

cioé un insieme unico di oggetti di X_1 (O_{x1}) viene scomposto in due parti, di cui una corrisponde all'insieme degli (O_{x2}) e l'altra non corrisponde: quest'ultima è la quantità di oggetti che X_1 ha in più o - che è lo stesso - quella che X_2 ha in meno (nel secondo caso gli elementi vengono marcati con un asterisco per indicare che si tratta di oggetti non esistenti, che vanno immaginati). Anche in questo caso, comunque, la comprensione scaturisce dalla commutazione fra rappresentazioni equivalenti della stessa situazione.

Stiamo sviluppando il modello, con buoni risultati, in modo da comprendere problemi diversi, per la cui soluzione si usano le altre operazioni aritmetiche: nei problemi considerati finora, di unione e separazione di parti, dall'analisi di tutte le proposizioni scaturivano sempre insiemi contenenti lo stesso tipo di elementi (palline); i problemi che richiedono il prodotto o il frazionamento, invece, si distinguono per il fatto che vengono numerati e messi in relazione insiemi di diversa natura (es. palline e bambini). Questa particolarità facilita l'innesco degli schemi appropriati anche in questi casi. Un resoconto più dettagliato di questo aspetto verrà fornito in un successivo articolo; nella tav. 6 viene dato, quale prototipo, un esempio di modello mentale che rappresenta lo schema di base della DISTRIBUZIONE.

Tav. 5 - Rappresentazione dei problemi 3 e 5

Testo: Joe e Tom insieme hanno 8 palline.
Joe ha 3 palline.
Quante palline ha Tom?

Rappresentazione proposizionale	*Rappresentazione iconica integrata*		
P1: TIME1 (HAVE-ALTOG. (J,T,8p))	HAVE-ALTOG.:	TIME1/EQ	$8(?(P_j\ P_j\ P_j\ P_j)\ ?(P_t\ P_t\ P_t\ P_t))$
		TIME1/EQ	$8(\ P_j\ P_j\ P_j\ P_j\quad P_t\ P_t\ P_t\ P_t)$
P2: TIME1 (HAVE (J, 3p))	HAVE-ALTOG.:	TIME1/EQ	$8(3(P_j\ P_j\ P_j\ P_j)\ ?(P_t\ P_t\ P_t\ P_t))$
		TIME1/EQ	$8(\ P_j\ P_j\ P_j\ P_j\quad P_t\ P_t\ P_t\ P_t)$
P3: GOAL (TIME1 (HAVE (T, xp)))	HAVE-ALTOG.:	TIME1/EQ	$8(3(P_j\ P_j\ P_j\ P_j)\ \mathrm{GOAL}(\mathbf{P_t\ P_t\ P_t\ P_t}))$
		TIME1/EQ	$8(\ P_j\ P_j\ P_j\ P_j\qquad \mathbf{P_t\ P_t\ P_t\ P_t})$

Testo: Joe ha 8 palline.
Tom ha 5 palline.
Quante palline ha Joe in più di Tom?

Rappresentazione proposizionale	*Rappresentazione iconica integrata*			
P1: TIME1 (HAVE (J, 8p))	$\mathrm{TIME1}\ (8\ (P_j\ P_j\ P_j\ P_j))$			
P2: TIME1 (HAVE (T, 5p))	$\mathrm{TIME1}\ (8\ (P_j\ P_j\ P_j\ P_j))\ (5\ (P_t\ P_t\ P_t\ P_t))$			
P3: GOAL (TIME1 (HAVE-MORE (J,T,p)))	HAVE-MORE:		TIME1/EQ $(8\ (P_j\ P_j\ P_j\ P_j$	$\mathbf{P_j\ P_j\ P_j\ P_j}))$
			TIME1/EQ $(8\ (P_j\ P_j\ P_j\ P_j)$	$(\mathbf{P_j\ P_j\ P_j\ P_j}))$
			TIME1/EQ $(5(P_t\ P_t\ P_t\ P_t)$	
				$(\mathbf{P_j\ P_j\ P_j\ P_j}))$
		MORE	GOAL	$(\mathbf{P_j\ P_j\ P_j\ P_j})$
		LESS		$(P_t^*P_t^*P_t^*P_t^*)$

Tav. 6 - Schema iconico della DISTRIBUZIONE
(x bambini, O oggetti)

DISTRIB:	$(x_1 \ldots$	(Ox_1)
	$\ldots x_2 \ldots$	(Ox_2)
	$\ldots x_3 \ldots$	(Ox_3)
	$\ldots x_4)$	(Ox_4)

L'insieme $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ viene collocato sull'asse verticale (cfr. Johnson-Laird, 1986).

6. Discussione

In questo lavoro è stato proposto un modello della rappresentazione di problemi aritmetici espressi a parole. Secondo questo modello, la comprensione di tali problemi avviene attraverso la costruzione ed elaborazione successiva nella memoria di lavoro di rappresentazioni, in diretta relazione con il testo e con l'ausilio di una memoria episodica del testo stesso. Per queste caratteristiche, il nostro modello può essere considerato uno sviluppo di quello proposto in vari lavori da Kintsch e suoi collaboratori e che abbiamo denominato modello KG. Tuttavia, il sistema di rappresentazione qui descritto è del tutto diverso, in quanto nel nostro modello la prima rappresentazione proposizionale delle frasi viene integrata con elementi iconici ed elaborata in cicli successivi in cui possono essere inseriti ulteriori elementi, proposizionali o iconici. L'elaborazione delle rappresentazioni avviene attraverso l'uso di schemi o *frames*, alcuni dei quali sono considerati anche di natura iconica e sono intesi come modelli mentali tipici di determinati schemi proposizionali (come AVERE, DARE, ecc.). Alla scelta dell'operazione che porta alla soluzione si arriva integrando ancora le rappresentazioni precedenti in modo da poterne inserire gli elementi negli schemi delle operazioni aritmetiche. In particolare, a questo proposito viene introdotto il concetto di "commutazione fra rappresentazioni equivalenti", ove per *commutazione* fra rappresentazioni si intende l'attivazione alternata delle stesse nella memoria di lavoro e per *rappresentazioni equivalenti* si intendono rappresentazioni di diversa natura relative allo stesso stato di cose.

Anche il nostro modello, come tutti gli altri, deve confrontarsi con il problema dell'adeguatezza a render conto degli eventi che intende spiegare ed avere un supporto empirico. La proposta di integrare le rappresentazioni proposizionali con quelle iconiche non risponde solo all'esigenza di rendere più "naturale" il sistema di rappresentazione ma anche a ragioni di economia. Fra i motivi più salienti della maggiore semplicità del nostro modello rispetto a quello KG c'è il fatto che non sono più necessarie complesse strategie per assegnare i ruoli agli insiemi, dal momento che questi ruoli emergono automaticamente dalla rappresentazione iconica; inoltre il numero degli schemi richiesti diminuisce, se non altro per il fatto che non sono necessari schemi separati per problemi da risolversi con operazioni inverse ma la cui rappresentazione è unica (come HAVE-MORE-THAN e HAVE-LESS-THAN, TRANSFER-IN e TRANSFER-OUT, ecc.).

Gli schemi stessi, poi, sono più semplici. Infatti, se si vuol rendere il modello adatto a problemi più complessi di quelli considerati nel modello KG, la complessità degli schemi proposizionali cresce con quella del problema. Ad esempio per GIVE potrebbe essere necessario specificare esplicitamente dei prerequisiti (come il fatto che X_1 possieda ciò che dà a X_2) e delle conseguenze (che X_1 non possiede più ciò che ha dato e che invece ora lo possiede X_2). Informazioni di questo genere, invece, sono contenute automaticamente nella rappresentazione iconica e per questo gli schemi iconici risultano più semplici.

Il modello è adatto per testare diverse strategie di insegnamento relative ai problemi considerati. In generale, esso predice un minore successo per quelle strategie che tentano direttamente di far considerare ai soggetti rappresentazioni standardizzate delle relazioni fra gli insiemi implicati in un problema, senza tener conto di come a queste si arrivi dalle rappresentazioni iniziali che i soggetti elaborano partendo dal modo in cui il problema è formulato.

In particolare, il modello può spiegare difficoltà ed errori in casi specifici. Ad esempio, sulla sua base si può fornire una spiegazione della particolare difficoltà, rispetto ad altri dello stesso genere, dei problemi di *confronto* (Riley et al., 1983). Secondo il modello KG tale difficoltà è dovuta alla mancanza di uno schema adeguato alla situazione; in base al nostro modello si può avanzare l'ipotesi che essa sia dovuta al fatto che in questo caso occorre scomporre un insieme al solo scopo di confrontare delle parti, in modo più arbitrario di quando si parla di parti che effettivamente vengono "tolte" o "sottratte" come nei casi del DARE e simili (regalare, mangiare, ecc.). Nell' "avere in meno", poi, c'è una difficoltà aggiuntiva dovuta al fatto (che emerge chiaramente nella rappresentazione del nostro modello) che si fa riferimento ad una quantità non immediatamente rappresentabile se non come parte immaginaria. Dai primi risultati di un'indagine empirica ancora in corso, sembra in effetti che i problemi che fanno riferimento all'"avere in meno" sono più difficili di quelli dell'"avere in più".

Poiché si tratta di un primo abbozzo di un modello che è ancora in corso di sviluppo e di perfezionamento, in questo articolo si è inteso soprattutto esplicitare gli assunti su cui si basa, mentre si è solo accennato ad alcune predizioni che esso consente di fare e alla natura del sostegno empirico che ci si attende, aspetti che saranno trattati più compiutamente altrove.

Bibliografia

Anderson J.R. (1983). *The architecture of cognition.* Harvard Universiy Press, Cambridge, Mass.

Briars D.J., Larkin J.H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.

Craighero G. (1971). *Per una didattica psicologica delle operazioni aritmetiche.* Giunti, Firenze.

Davis R.B. (1984). *Learning mathematics. The cognitive science approach.* Croom Helm, London-Sydney.

Dellarosa Cummins D., Kintsch W., Reusser K., Weimer R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.

Ginsburg H.P. (Ed.) (1983). *The development of mathematical thinking*. Academic Press, New York.

Greeno J.G. (1987). Instructional representations based on research about understanding. In Schoenfeld, A.H., 1987, pp. 61-88.

Johnson-Laird P.N. (1983). *Mental models*. Cambridge University Press, Cambridge.

Johnson-Laird P.N. (1986). How is meaning mentally represented? *Versus*, 44/45, 99-118.

Kintsch W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: a construction - integration model. *Psychological Review*, 95, 163-182.

Kintsch W., Greeno J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.

Kintsch W., Van Dijk T.A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394.

Klahr D. (Ed.) (1976). *Cognition and instruction*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Kosslyn S.M. (1980). *Images and mind*. Harvard Universiy Press, Cambridge, Mass..

Minsky M. (1978). A framework for representing knowledge. In Winston, P.H., *The psychology of computer vision*. Mc Graw-Hill, New York, pp. 211-277.

Newel l A., Simon H.A. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Oden G.C. (1987). Concept, knowledge, and thought. *Annual Review of Psychology*, 38, 203-227.

Pylyshyn Z.W. (1984). *Computation and cognition*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Resnick L.B., Ford L.B. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Riley M.S., Greeno J.G., Heller J.I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In Ginsburg, H.P., 1983, pp. 153-196.

Schank R.C., Abelson R.P. (1977). *Scripts plans goals and understanding*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, New York.

Schoenfeld A. (Ed.) (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Silver E.A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In Schoenfeld, A., 1987, pp. 33-60.

Simon H.A., Hayes J.R. (1976). Understanding complex task instructions. In Klahr D., 1976.

Van Dijk T.A., Kintsch W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. Academic Press, New York.