

RAPPRESENTAZIONE ICONICA E PROCEDURA NELLA SOLUZIONE DI PROBLEMI ARITMETICI: UN'INDAGINE EMPIRICA

ICONIC REPRESENTATION AND PROCEDURES IN ARITHMETIC
PROBLEM SOLVING: AN EMPIRICAL INQUIRY

Alberto Greco¹

Dipartimento di Filosofia, Laboratorio di Psicologia, Università di Genova

Introduzione

Nel presente articolo viene presentata un'indagine riguardante alcuni processi cognitivi messi in atto nella soluzione di problemi aritmetici. Lo studio di tale tematica, che in passato ha rivestito un interesse prevalentemente didattico, ha assunto un posto rilevante nella psicologia del *problem solving* e nella scienza cognitiva. Il fatto che una teoria psicologica - aiutando a comprendere i processi di natura categorico-concettuale, logica, linguistica che entrano in gioco nella soluzione di problemi matematici - aiuti a formulare migliori strategie didattiche è cosa ovvia. Invece ci si rende ora conto che lo studio di tali processi nel contesto della matematica può migliorarne la comprensione anche in altri contesti, sia perché si tratta di un ambito più semplice e meglio definito, sia perché si vede meglio l'integrazione fra aspetti tradizionalmente considerati separatamente (ad es. logici da una parte, linguistici dall'altra).

Dopo il classico lavoro in chiave simulativa di Bobrow (1968), il cui programma, STUDENT, era in grado di ricavare equazioni da problemi espressi a parole (sia pure attraverso un procedimento che non teneva conto degli aspetti semantici) e dopo l'approccio ispirato da Newell e Simon (1972), centrato sullo studio delle *strategie* di soluzione dei problemi, le ricerche si sono orientate sempre più verso il modo in cui le strategie stesse si sviluppano dalla comprensione del testo. Per spiegare la soluzione, secondo il nuovo approccio, più che l'indagine sullo spazio del problema o sugli operatori che consentono di passare da uno stato all'altro, è importante lo studio del modo in cui i problemi sono *rappresentati*.

I problemi aritmetici di solito sono formulati a parole (per questo in

¹ Indirizzare le richieste di estratti presso: Dipartimento di Filosofia, Laboratorio di Psicologia, Via Balbi 4, 16126 Genova.

letteratura sono noti come *word problems*), sotto forma di piccole storie con personaggi e azioni di vita quotidiana. Ai bambini è richiesto di scegliere l'operazione aritmetica appropriata per la soluzione partendo da un testo che contiene proposizioni relative a fatti che riguardano determinate quantità (insiemi) di oggetti (possesso, cessione, confronto, ecc.). Gli elementi del problema (insiemi e quantità) non sono dunque direttamente accessibili ma il soggetto se ne deve costruire una rappresentazione attraverso l'elaborazione delle proposizioni originarie. Lasciando da parte i processi di natura linguistico-concettuale attraverso i quali questa elaborazione è compiuta, ci concentreremo qui su quale forma assuma alla fine questa rappresentazione. A questo proposito esistono due possibilità.

La prima è che la rappresentazione impieghi proposizioni più succinte ed economiche di quelle originarie, ma pur sempre proposizioni. Questo tipo di rappresentazione viene definita *proposizionale*. In questo caso per la comprensione si fa riferimento ai simboli linguistici e a conoscenze enciclopediche sul mondo da cui si possono trarre inferenze (ad es. il dare o mangiare qualcosa implica non avere più in seguito ciò che si è dato o mangiato) e che quindi devono essere codificate in una forma che consenta l'applicazione di calcoli logici.

La seconda possibilità è che la rappresentazione sia più concreta e rifletta direttamente un certo stato di cose del mondo, consentendo ad esempio di percepire insiemi di oggetti con le loro caratteristiche spaziali - visualizzandone le relazioni attraverso la forma e/o la disposizione spaziale degli elementi. Per riferirsi a questo secondo tipo di rappresentazione si può scegliere, a seconda della sfumatura di significato che si intende sottolineare, una delle tante denominazioni proposte in letteratura (per immagini, pittorica, analogica, iconica...). Qui, per indicare in generale questo tipo di rappresentazione, useremo il termine *rappresentazione iconica*. Le rappresentazioni qui descritte possono essere di natura mentale ma non di rado nell'attività didattica si fa ricorso a una loro espressione concreta esterna (grafica); poiché l'uso dello stesso termine "rappresentazione" nei due casi può indurre confusione, adotteremo il termine *presentazione* per indicare l'espressione concreta di immagini attraverso l'uso di disegni, grafi, ecc. (cfr. von Glasersfeld, 1987; Shanon, 1993).

Nella prima parte di questo articolo verrà evidenziato come le ricerche sulla rappresentazione nei problemi aritmetici, nella maggioranza dei casi, ne abbiano preso in considerazione solo gli aspetti proposizionali. Saranno quindi discussi i contributi derivanti dalla letteratura sui processi di elaborazione delle presentazioni grafiche e sul ruolo delle immagini mentali nella soluzione di problemi. Si giungerà a concludere che le due forme di rappresentazione, iconica e proposizionale, non sono alternative ma devono essere presenti entrambe ed essere integrate, anche se come questa integrazione avvenga è un argomento d'indagine ancora poco esplorato. L'ipotesi che qui viene formulata è che tale integrazione possa avvenire

attraverso l'uso di *procedure*, intese come sequenze di passi relativi non alla strategia di soluzione ma al controllo dell'informazione.

La soluzione dei problemi aritmetici sembra un banco di prova interessante per questa indagine dal momento che le rappresentazioni necessarie per queste situazioni problematiche sono precise e limitate e che appare relativamente semplice controllare le variabili in gioco. Nella seconda parte dell'articolo verrà presentato a questo proposito un esperimento condotto allo scopo di valutare in che modo l'uso di presentazioni grafiche o proposizionali e uno specifico addestramento all'uso di procedure influenzino la rappresentazione e soluzione di problemi aritmetici.

Rappresentazioni nella soluzione di problemi

La rappresentazione nei problemi aritmetici

Nei modelli della comprensione e soluzione di problemi aritmetici generalmente si è dato molto peso a rappresentazioni di natura proposizionale (oltre ai lavori di Kintsch e coll., citati più avanti, si veda ad es. Lewis e Mayer, 1987; Verschaffel *et al.*, 1992; Stern, 1993). Ciò è probabilmente dovuto al fatto che il punto di partenza, per il solutore, è un testo, cioè una serie di proposizioni da "decodificare".

In effetti il primo e più autorevole modello, quello di Kintsch e coll. (Riley, Greeno e Heller, 1983; Kintsch e Greeno, 1985; Dellarosa Cummins *et al.*, 1988), è stato elaborato a partire da una teoria della comprensione del testo (van Dijk e Kintsch, 1983). Secondo tale modello, dal testo dei problemi vengono ricavati due tipi di rappresentazione: una del testo stesso (di natura proposizionale) e una della situazione (*situation model*). Quest'ultima è una rappresentazione generale dei fatti a cui si riferisce il testo del problema, indipendentemente da come è formulato. La rappresentazione della situazione è sì separata ma, come quella del testo, è esclusivamente proposizionale, costituita da predicati e argomenti, e non c'è posto per primitivi di natura iconica.

Neppure i modelli successivi hanno spostato l'attenzione sul ruolo che nella comprensione dei problemi aritmetici viene svolto da rappresentazioni non proposizionali. Ad esempio alcuni autori (Mayer, 1985; Lewis e Mayer, 1987) hanno identificato nella soluzione diverse fasi (traduzione, integrazione, pianificazione ed esecuzione della risposta) che sono riferite alla costruzione di rappresentazioni elicitate esclusivamente dalle singole proposizioni del problema, senza che aspetti iconici vi abbiano alcun ruolo. L'influenza del modello di Kintsch sui successivi sembra evidente.

Lo stesso Kintsch (1988) ha però ammesso che "sarebbe desiderabile espandere" i modelli proposizionali in modo da includervi rappresentazioni

non proposizionali e che i modelli situazionali possono avere un formato diverso da quello proposizionale.²

Effetti rappresentativi delle presentazioni grafiche nella soluzione di problemi

E' universalmente riconosciuto che l'avere a disposizione presentazioni grafiche o pittoriche aiuta nella trasmissione di informazioni (testi scolastici o scientifici, lezioni, conferenze, ecc.) ed è utile anche nella soluzione di problemi. Anche nel caso della soluzione di problemi matematici sia gli insegnanti nelle loro spiegazioni che tutti i libri di testo fanno ampio uso di disegni per rappresentare gli insiemi di cui si tratta e le loro relazioni. Si ritiene anzi comunemente che una qualunque presentazione grafica della situazione problematica sia sempre meglio di una presentazione solo verbale; inoltre, gli autori di alcuni libri di testo sembrano supporre che sia ancora meglio fornire, anziché una sola, un certo numero di presentazioni grafiche alternative per la stessa situazione (v. ad es. Calidoni, 1989).

Sembra perciò anomalo il fatto, sopra evidenziato, che la maggior parte dei modelli relativi alla comprensione dei problemi aritmetici trascuri questi aspetti. Anche quando si prendono in considerazione aspetti non proposizionali, come nel modello di Briars e Larkin (1984), più che a immagini si fa riferimento ad azioni concrete compiute su elementi disposti nello spazio. In questo caso non si dice molto riguardo a cosa succede quando dall'azione su *token* concreti si passa alla rappresentazione mentale per immagini o quando si fa uso della visualizzazione grafica che spesso è un passo intermedio. Esistono tuttavia indagini più generali, non limitate al campo dei problemi aritmetici o matematici, nell'ambito delle quali sono state compiute teorizzazioni, riguardanti il modo in cui la presentazione grafica viene elaborata a livello mentale, applicabili anche a quel campo.

Se consideriamo l'ambito delle ricerche sul ruolo che la presentazione grafica ha sui processi cognitivi in generale e sulla comprensione della situazione problematica in particolare (ad es. Larkin e Simon, 1987; Mayer e Gallini, 1990; Schnitz, 1993), troviamo che, in realtà, siamo ancora lontani dall'avere una chiara idea del meccanismo che rende più facile la comprensione quando si abbia la possibilità di visualizzare le informazioni. Per spiegare l'efficacia cognitiva della visualizzazione grafica sono state proposte diverse ipotesi, ma due sono prevalenti: quella della *codifica per immagini* e quella dei *modelli mentali*.

² Secondo Perrig e Kintsch (1985) il *situation model* può essere rappresentato in termini proposizionali oppure per immagini in relazione alla natura del testo e a caratteristiche individuali dei soggetti. Kintsch (1988), pur riconoscendo la "desiderabilità" di rappresentazioni non proposizionali e richiamando esplicitamente i modelli mentali di Johnson-Laird (1983), mostra di ritenere che lo studio di rappresentazioni non proposizionali sia subordinato a quello delle proposizionali, il che sembra discutibile.

Secondo la prima ipotesi la presentazione di grafici attiverebbe rappresentazioni analogiche, o immagini mentali, e questa modalità di rappresentazione a sua volta faciliterebbe le elaborazioni richieste per risolvere i problemi. La letteratura appena citata fa esplicito riferimento alla classica teoria della "doppia codifica" (Paivio, 1971, 1986), che per spiegare la facilitazione mnestica attribuibile a stimoli pittorici ha sostenuto che l'informazione pittorica sarebbe elaborata a due livelli, uno verbale ed uno di immagine mentale.

A questo proposito è pertinente anche la vastissima letteratura sul ruolo delle immagini mentali nei processi cognitivi, in particolare nel *problem solving* (per una rassegna v. Antonietti, 1989; Denis, 1990). Con il termine "immagine" ci si riferisce qui a quel tipo di rappresentazioni più concrete, che riflettono un certo stato di cose del mondo in maniera diretta, come se fossero percepite, con caratteristiche spaziali. Questo tipo di rappresentazioni è stato variamente denominato, con diverse sfumature di significato: "quasi-pittorico" (Kosslyn, 1980), dell' "immagine spaziale" (Anderson, 1983), o - adottando una metafora ispirata al funzionamento di certe macchine - "analogico" (contrapposto a "digitale"; cfr. Pylyshyn, 1984).

Per spiegare l'efficacia delle presentazioni grafiche nella soluzione dei problemi, in sostanza si suppone che le informazioni visive siano capaci di mantenere le relazioni esistenti nella situazione (nel caso dei problemi aritmetici si tratta di relazioni fra insiemi) in modo diretto o analogico, quindi più efficace di quelle proposizionali che sono astratte e simboliche (v. ad es. Mandl e Levin, 1989). È stato anche sostenuto che la possibilità di visualizzazione favorisce il *problem solving* perché consente al soggetto di concentrarsi sugli aspetti rilevanti della situazione e di cogliere la situazione stessa nella sua globalità (Antonietti e Angelini, 1991), di facilitare la ristrutturazione del problema o simulare le trasformazioni implicate nel problema usando un "codice più flessibile" (Antonietti, 1991).

Tutte queste ipotesi riguardano gli effetti dell'uso di informazioni pittoriche dando per scontato che queste "in qualche modo" siano state trasformate in immagini mentali. Ma la relazione fra presentazione grafica esterna e rappresentazione mentale non è così diretta. Soprattutto rimane poco chiaro in che modo le informazioni visive vengano specificamente considerate o utilizzate come rilevanti per la situazione problematica. Ad esempio, com'è possibile cogliere in un'immagine le "relazioni" fra gli elementi di una situazione? Anche se si suppone che il soggetto a cui è presentato un grafico ne attivi una copia mentale di natura iconica, perché l'immagine possa essere utile nella soluzione di un problema essa in qualche momento (a livello percettivo o rappresentativo) va "letta" e decodificata in modo che le sue componenti vengano "agganciate" correttamente agli

aspetti rilevanti della situazione.

Per spiegare come ciò avvenga, l'ipotesi che a prima vista appare più plausibile è che la situazione pittorica sia "tradotta" in codici simbolico-proposizionali. Questa spiegazione appare ancora più plausibile nel nostro caso in cui si tratta di problemi espressi verbalmente e per i quali quindi si può supporre che la rappresentazione iconica vada a sovrapporsi ad una prima rappresentazione del problema che il soggetto ha costruito in termini essenzialmente proposizionali. Tuttavia anche in questo caso bisogna render conto di come una tale eventuale traduzione avvenga e di come gli elementi rilevanti per la comprensione della situazione siano rappresentati. Per di più, seguendo questa ipotesi bisognerebbe accettare la supposizione, non necessaria, che il codice verbale prevalga alla fine su quello iconico³.

Integrazione fra rappresentazioni iconiche e proposizionali: l'ipotesi dei modelli mentali

Da queste considerazioni appare evidente che nella soluzione di problemi, come in altri processi psicologici, le relazioni esistenti fra gli oggetti o eventi del mondo (che nel nostro caso riguardano *insiemi*) possono essere rappresentate sia attraverso proposizioni che immagini. Come si è accennato, il primo formato è più adatto a consentire inferenze logiche, il secondo ad evidenziare analogie. Non sembra produttivo incentrare la spiegazione sull'una *oppure* sull'altra modalità di rappresentazione, come se proposizioni e immagini fossero alternative né ipotizzare un meccanismo di traduzione da un codice all'altro.

D'altra parte, limitarsi a constatare che i due sistemi di rappresentazione coesistono ci fa tornare al punto da cui eravamo partiti, in quanto non spiega l'efficacia cognitiva della presentazione grafica. Occorre ammettere che non si ha quasi mai a che fare con rappresentazioni "pure" dell'uno o dell'altro tipo e che è necessario ipotizzare rappresentazioni *integrate*, di natura sia iconica che proposizionale (per maggiori dettagli v. Greco, 1990). Ci sono ricerche che mostrano la mancanza negli studenti delle strategie adeguate per una tale integrazione (Moore, 1993), ma render conto

³ In questa sede non è il caso di addentrarsi nella controversia sulle relazioni tra rappresentazioni per immagini e proposizionali (per una rassegna v. Giusberti, 1984; Tye, 1991), anche perché la questione lì in gioco riguarda - in ultima analisi - la riducibilità di tutte le rappresentazioni ad un codice unico, quello che gli scienziati cognitivi, seguendo Fodor (1975), chiamano "linguaggio del pensiero" e a cui attribuiscono natura computazionale. Si veda per tutti Pylyshyn (1984), che nega l'esistenza di un codice distinto per le immagini, come sarebbe supposto dall'ipotesi di una *traduzione* da un codice all'altro. Ai nostri fini non è comunque necessario risolvere questa questione. Come ha sottolineato Johnson-Laird (1983, p.247 tr.it.), "un processo psicologico che pur utilizza ad un dato livello soltanto stringhe di simboli, ad un più alto livello può utilizzare altre rappresentazioni di diverso tipo".

di come essa avvenga è un argomento d'indagine ancora poco esplorato (cfr. Mayer, 1993).

A questo proposito si trovano in una posizione migliore le ipotesi che fanno riferimento alla teoria, anch'essa ormai classica, dei "modelli mentali" (Larkin e Simon, 1987; Mayer e Gallini, 1990). I modelli mentali (Johnson-Laird, 1983; Gentner e Stevens, 1983), come le immagini, rappresentano un certo stato di cose in maniera analogica, riproducendone la struttura attraverso contrassegni (*token*) che possono conservare relazioni spaziali, temporali, causali o altri aspetti concreti della situazione modellata ma non sono di natura pittorica. Il grande successo di questa teoria testimonia l'interesse di un sistema di rappresentazione strutturalmente analogo al mondo descritto ma che sia manipolabile simbolicamente come le proposizioni. I *token* che compongono un modello mentale possono essere considerati alla stregua di icone, potendo essere disposti nello spazio in modo da rispecchiare direttamente certe relazioni, ma sono, come i simboli, elementi che stanno per qualcosa d'altro. Inoltre si tratta di una modalità di rappresentazione più economica di quella proposizionale: ad esempio le relazioni "Giuseppe è a sinistra di Franco" e "Franco è a destra di Giuseppe" potrebbero essere rappresentate entrambe da un unico modello (G F).

Il "modello mentale" può rivelarsi un sostanziale avanzamento verso la necessaria integrazione fra aspetti proposizionali e iconici, ma perché tale costruito teorico abbia valore esplicativo, almeno a proposito della soluzione di problemi, occorre anche chiarire come i modelli siano costruiti a partire da immagini e/o da proposizioni e soprattutto in che cosa risieda la loro efficacia nel facilitare la soluzione.

L'aspetto essenziale perché una presentazione grafica (o una corrispondente rappresentazione per immagini) sia utile per la soluzione di un problema è che si possano stabilire chiare relazioni fra gli elementi in essa contenuti e relazioni esistenti in uno stato di cose. Ciò significa che dev'essere esibita una corrispondenza analogica con una certa situazione. La significatività delle relazioni analogiche, tuttavia, non dipende dalla struttura intrinseca della rappresentazione ma da vincoli imposti ad essa attraverso certe *procedure* dal sistema che la costruisce o esamina⁴. In altri

⁴ Si tratta di ciò che Shepard (1975) ha chiamato "isomorfismo di secondo ordine". Si prenda ad esempio la rappresentazione di un diagramma attraverso una matrice bidimensionale di punti: per quanto vi sia una corrispondenza punto-a-punto di primo ordine fra il diagramma originale e la sua rappresentazione, a questo livello di isomorfismo una qualunque funzione di trasformazione "significativa" (poniamo una rotazione) operata sulla rappresentazione non ha nulla di diverso da qualunque altra trasformazione non significativa (come potrebbe essere scambiare fra loro un certo numero di punti). La corrispondenza dev'essere costruita ad un ordine superiore di isomorfismo, e dunque occorre ipotizzare che la significatività analogica dipenda da come il sistema *usa* la rappresentazione, cioè dalle *procedure* attraverso le quali vengono stabilite relazioni fra gli elementi della rappresentazione ed elementi della situazione.

termini, un'analogia non è inerente alla struttura della presentazione o rappresentazione che la veicola, ma dipende da azioni che consentono di stabilire relazioni fra certi elementi della rappresentazione e elementi della situazione. Inoltre, se si tiene conto del fatto che la rappresentazione analogica è necessariamente una semplificazione selettiva della situazione originaria (v. Greco, 1988, 1994)⁵, tali elementi non possono essere "qualunque" ma devono essere selezionati quelli che sono essenziali o, nel caso dei problemi, importanti per la soluzione. Si può dunque ritenere che le procedure, avendo il compito di *identificare* elementi e di *stabilire relazioni*, dovranno presumibilmente far uso anche di primitivi logico-proposizionali.

Queste considerazioni suggeriscono l'ipotesi che l'efficacia di presentazioni grafiche e rappresentazioni iconiche nella soluzione di problemi sia legata all'uso di procedure che identifichino e rendano esplicite relazioni di corrispondenza con gli elementi rilevanti della situazione, consentendo una integrazione fra aspetti iconici e proposizionali.

Ruolo delle procedure nell'integrazione iconico-proposizionale

Com'è noto, c'è stata una vivace discussione nell'ambito della scienza cognitiva a proposito del formato di rappresentazione a cui ispirarsi per realizzare sistemi cognitivi artificiali. Alcuni hanno ritenuto che la conoscenza sia codificata prevalentemente sotto forma di descrizioni di fatti (rappresentazione dichiarativa), altri sotto forma di azioni da eseguire (rappresentazione procedurale). Al di là della radicalizzazione della discussione, appare evidente che il sistema cognitivo umano usa entrambe le forme di rappresentazione a seconda dei tipi di conoscenze e dei loro usi⁶.

Nel sostenere l'ipotesi che la costruzione di rappresentazioni efficaci, che integrano informazioni iconiche e proposizionali, è facilitata dall'uso di procedure, bisogna chiarire di quale tipo di procedure si tratta. Che nella soluzione di problemi (specialmente quelli matematici) siano usate consapevolmente procedure, nel senso di "algoritmi" da seguire per operare sui dati, è cosa fin troppo evidente, tanto che comunemente dal punto di vista

⁵ In questo senso si tratta di veri e propri "modelli" del mondo, simili a quelli elaborati nelle rappresentazioni della scienza (che fanno tipicamente uso dell'analogia e della semplificazione) e appare giustificata la locuzione "modelli mentali". Noi preferiamo usare l'espressione "rappresentazione iconica" anziché "modello mentale" per sottolineare la funzione che ciascun elemento (icona) ha, che è al tempo stesso concreta (sta per un particolare elemento) e astratta (sta per uno qualunque degli elementi che condividono gli stessi attributi).

⁶ Per dettagli ed una valutazione di questa discussione vedi Greco, 1988, pp. 150-153. Una sintesi di modelli procedurali e dichiarativi della competenza matematica si trova in Pellerey (1987).

dell'insegnamento della matematica si pone la domanda se sia utile insegnare esplicitamente routine che "automatizzano" la soluzione, rischiando che l'allievo perda di vista la comprensione del significato di ciò che sta facendo (cfr. Lesh, 1985; Boero, 1986; Orton, 1987). Tuttavia non è questo il senso in cui qui si fa riferimento a "procedure". Come l'ha definita Davis (1984), una procedura è "una sequenza ordinata di passi unitari", da seguire in maniera non necessariamente consapevole. I passi che compongono la procedura in questo senso non sono esplicite operazioni sui dati del problema quanto schemi che controllano che cosa fare, quali informazioni prendere in considerazione nel testo o nell'eventuale grafo e come utilizzarle. Le procedure come sequenze consapevoli di operazioni sui dati del problema non coincidono con le procedure di controllo, che sono automatiche e quindi difficilmente influenzabili dalle istruzioni (Shiffrin e Schneider, 1977), anche se chiaramente devono essere compatibili con quelle e a volte possono comprenderle come sub-procedure.

Riveste dunque interesse empirico la questione se la disponibilità di procedure abbinate alla presentazione grafica possa facilitare la soluzione di problemi. La soluzione dei problemi aritmetici fornisce una situazione interessante per questa indagine per almeno due motivi. In primo luogo, quando questi automatismi non si sono ancora creati, com'è il caso dei bambini che affrontano per la prima volta situazioni problematiche nuove, l'insegnamento esplicito di procedure di controllo può facilitare il passaggio dal testo al modello della situazione e soprattutto l'uso corretto delle presentazioni grafiche che vengono fornite dall'insegnante o che si trovano sui libri. In secondo luogo, le rappresentazioni necessarie per la comprensione di queste situazioni problematiche sono sufficientemente limitate e identificabili con precisione.

Esperimento*

Definizione dell'indagine

L'indagine empirica qui presentata riguarda la relazione fra uno specifico addestramento all'uso di procedure e la disponibilità di presentazioni grafiche nella soluzione di problemi aritmetici. L'esperimento vuol compiere una prima esplorazione di questa relazione senza avere la pretesa di trattarla in maniera esaustiva.

I problemi aritmetici di cui ci occupiamo sono presentati verbalmente sotto forma di piccole storie (*word problems*). Come precisato più in dettaglio altrove (Greco, 1990), in questi casi la soluzione (cioè l'individua-

* Si ringraziano il Dott. Malombra, direttore didattico X Distretto di Genova, R. Bovio e A. Scotto per la collaborazione prestata nell'esecuzione dell'esperimento.

zione della corretta operazione da eseguirsi per rispondere alla domanda formulata) scaturisce da una adeguata rappresentazione della situazione a partire dal testo. In particolare, per costruire modelli delle situazioni aritmetiche è necessario essenzialmente essere in grado di compiere operazioni logiche e di specificazione concettuale (da non confondersi con le operazioni aritmetiche) in modo da rappresentarsi *insiemi* e loro relazioni (parti unite, separate, poste in corrispondenza, ecc.).

I problemi qui utilizzati richiedono che venga compiuta l'operazione aritmetica della differenza. Questa operazione, in realtà, può essere richiesta in situazioni differenti dal punto di vista logico. Infatti è connessa all'operazione logica di *unione/separazione* di parti, che può essere ricondotta a tre schemi di base⁷ e può dar luogo dunque a tre diversi tipi di problemi: 1) *complemento*, quando l'unione o separazione nasce da una distinzione fra insiemi e sotto-insiemi operata sincronicamente sulla base di categorie concettuali; 2) *sottrazione/aggiunta*, quando c'è una effettiva separazione o unione, che si svolge in tempi diversi; 3) *differenza/corrispondenza*, quando certi insiemi sono separati al solo scopo di operare un confronto fra parti corrispondenti e non corrispondenti.

Nell'esperimento sono stati proposti solo problemi di *differenza*, che risultano essere i più difficili per i bambini delle prime classi del ciclo elementare (Riley *et al.*, 1983; Briars e Larkin, 1984; Kintsch e Greeno, 1985; Lewis e Mayer, 1987; Dellarosa *et al.*, 1988; Morales *et al.*, 1985; Stern, 1993). La difficoltà viene attribuita o alla complessità della situazione o alla particolare formulazione linguistica di questi problemi. Nel primo caso si tratta del fatto che per una corretta comprensione della situazione occorre confrontare due insiemi, separando quello più grande in una parte corrispondente all'altro e in una parte non corrispondente. Nel secondo caso si tratta dell'uso di espressioni come "avere in più" o "avere in meno" che non fanno riferimento a insiemi direttamente percepibili nella situazione ma che vanno costruiti; inoltre occorre rendersi conto che quando si parla di parti che si "hanno in meno" ci si riferisce in realtà a parti che *non* si hanno. A nostro parere le due spiegazioni non sono alternative ed entrambi i fattori, situazionale e testuale, si combinano.

Sono stati scelti i problemi più difficili anche perché questi vengono comunemente spiegati ai bambini utilizzando presentazioni grafiche di vario

⁷ Questi schemi di base sono riconosciuti da diversi autori (Craighero, 1971; Briars e Larkin, 1984; Kintsch e Greeno, 1985; Vergnaud, 1986; Mariotti, 1986), anche se le denominazioni cambiano da un autore all'altro. In particolare, per i problemi di *complemento*, Kintsch e Greeno usano l'espressione "problemi relativi a relazioni statiche fra insiemi". I problemi di *sottrazione* sono stati definiti problemi di "cambiamento" (Kintsch e Greeno), problemi con "action cues" (Briars e Larkin), problemi di "trasformazione" (Mariotti, Vergnaud). I problemi di *differenza*, infine, problemi di "confronto" (Kintsch e Greeno; Briars e Larkin; Vergnaud) e problemi di "unione" (Mariotti).

genere: si va dai diagrammi di Venn ai grafi ad albero, ai grafi vettoriali. Come si è detto sopra, nella pratica didattica a volte per la stessa situazione vengono utilizzate diverse presentazioni grafiche contemporaneamente, in base all'evidente supposizione che (per motivi non chiari) la disponibilità di rappresentazioni alternative faciliti la comprensione.

Ipotesi

I presupposti teorici su cui ci basiamo, illustrati nella prima parte dell'articolo, possono essere riassunti in due punti: (a) la presentazione pittorica e quella proposizionale danno origine *insieme* ad una rappresentazione integrata di natura iconico-proposizionale simile a un modello mentale; (b) la presentazione ha effetto in virtù di *procedure*, nel senso sopra precisato di sequenze di controllo, che realizzano questa integrazione.

L'esperimento è stato progettato al fine di chiarire:

a) se sia sufficiente la disponibilità di presentazioni grafiche per facilitare la costruzione di modelli dei problemi e quindi la soluzione;

b) se la performance sia facilitata da una presentazione grafica abbinata all'insegnamento di una procedura;

Si è anche inteso indagare sull'eventualità che l'avere a disposizione, oltre agli schemi procedurali, una pluralità di presentazioni grafiche costituisca un'ulteriore facilitazione.

Soggetti

I soggetti sono 100 bambini di entrambi i sessi, di età compresa fra i 6 e i 7 anni, frequentanti la seconda classe del ciclo elementare. Nella scelta delle classi ci si è accertati che non fossero ancora stati presentati nel corso scolastico problemi aritmetici né presentazioni grafiche dei tipi da noi utilizzati.

Disegno

Viene manipolata la modalità di presentazione dei problemi ai soggetti, cioè l'avere a disposizione presentazioni grafiche e la dimostrazione dell'uso di una procedura per l'uso delle stesse. La variabile indipendente (modalità di presentazione) assume dunque 2 livelli X 2 valori: *tipo di presentazione* (grafica oppure proposizionale), *insegnamento di procedura* (sì/no). Da questo disegno fattoriale risultano 4 gruppi.

I soggetti sono stati assegnati in modo casuale a ciascun gruppo, composto da 20 bambini. I soggetti del gruppo 1 (di controllo) hanno ricevuto il testo dei problemi senza istruzioni particolari, quindi senza l'uso di grafici né di procedure. Ai soggetti del gruppo 2 il testo è stato fornito

con presentazioni grafiche ed è stata loro mostrata una procedura per l'uso delle stesse. L'addestramento procedurale, per questo come per i successivi gruppi, non riguarda in alcun modo "strategie" per la soluzione dei problemi, ma solo passi che fanno parte di processi di controllo dell'informazione, la cui finalità è la semplice rappresentazione (grafica o no) della situazione. Le presentazioni grafiche utilizzate consistono in diagrammi di Venn, modificati secondo le indicazioni del Gruppo A. Young, 1990 (indicheremo come DVM questo tipo di diagrammi, riportati nell'appendice 3)⁸. I soggetti del gruppo 3 hanno avuto a disposizione le stesse presentazioni grafiche ma non è stata loro insegnata alcuna procedura. I soggetti del gruppo 4 hanno ricevuto il testo dei problemi senza presentazioni grafiche ed è stata loro insegnata una procedura simile a quella del gruppo 2 ma in termini esclusivamente verbali. Nella tavola I sono esposte le informazioni fornite dalle istruzioni.

Tavola I - Informazioni fornite dalle istruzioni

Il personaggio che ha di più qui è indicato con P, quello che ha di meno con M.
I numeri delle parti si riferiscono al DVM (v. Appendice 3)

A - La quantità posseduta da P è composta da due parti (1 e 2).

B - La quantità posseduta da M (parte 3) corrisponde ad una parte di cose possedute da P (parte 1) (*per il gruppo 2 questa informazione non viene fornita esplicitamente*).

C - La quantità definita "in più" o "in meno" è posseduta da P ma non è posseduta da M.

D - Le quantità definite "in più" (parte 2) o "in meno" (parte 4) corrispondono.

E' stato anche costituito un gruppo sperimentale aggiuntivo (gruppo 5), anch'esso di 20 soggetti, allo scopo di valutare l'effetto della disponibilità di più presentazioni. I soggetti assegnati a questo gruppo hanno avuto a disposizione una pluralità di presentazioni grafiche, per ciascuna delle quali è stata insegnata una corrispondente procedura.

Il procedimento adottato per tutti i gruppi esclude qualsiasi effetto *warm-up*, dovuto alla progressiva familiarizzazione con il materiale, in quanto i problemi sono stati presentati a ciascun soggetto in ordine casuale

⁸ Diagrammi simili al DVM sono stati usati da Willis e Fuson (1988), che hanno insegnato ai bambini a disegnare essi stessi i grafici e a porre i numeri sulle parti relative ai vari insiemi. In questo caso, tuttavia, l'accento era posto sulla scelta del diagramma appropriato al tipo di problema e sulla collocazione dei numeri nella giusta posizione. La facilitazione rilevata è stata con ogni probabilità dovuta al fatto che il setting sperimentale comprendeva l'insegnamento di una procedura, ma questo addestramento purtroppo non è stato controllato esplicitamente.

diverso e la procedura prevedeva esplicitamente, per i gruppi sperimentali, di assicurarsi che i soggetti avessero capito le spiegazioni fin dall'inizio.

Procedimento

Ai soggetti dei gruppi 1, 2, 3, 4 sono stati presentati 6 problemi di differenza in ordine casuale diverso per ciascun soggetto (i testi dei problemi sono riportati nell'Appendice 1). Ai soggetti del gruppo 5 sono stati presentati 6 problemi di differenza, uguali ai problemi 1 e 2 degli altri 4 gruppi, ripetuti 3 volte con valori numerici diversi (per le forme alternative di questi problemi, contrassegnati con i numeri 1 e 2 seguiti dalle lettere A,B,C, v. Appendice 1). Si è proceduto in questo modo al fine di sottoporre ciascun soggetto ad un numero complessivo di prove non superiore a quello dei soggetti degli altri gruppi. L'ordine di presentazione dei problemi e quello in cui sono state utilizzate le presentazioni grafiche sono stati determinati casualmente per ciascun soggetto. Tutti i soggetti sono stati trattati singolarmente.

Gruppo 1 (controllo) - Per questo gruppo viene riprodotta una tipica situazione scolastica di soluzione dei problemi: al soggetto sono presentati i testi dei problemi aritmetici, uno alla volta; viene chiesto di leggere a voce alta ciascun problema e di dire poi l'operazione necessaria per risolverlo. Viene precisato che non ha importanza eseguire il calcolo ma solo dire l'operazione.

Gruppo 2 (DVM con procedura) - I soggetti assegnati a questo gruppo hanno a disposizione il materiale grafico (DVM) e inoltre viene loro presentata una procedura per l'utilizzo del materiale stesso (vedi appendice 2A) nella quale viene specificato quali passi compiere (considerare parti, collocarvi numeri) e in quale ordine. Per assicurarsi che abbia capito, al soggetto viene richiesto di usare il materiale grafico per rappresentare le quattro parti presenti in esso. Ad esempio viene detto "Anastasia ha 3 caramelle più di Roberta" e il soggetto deve posizionare il nome ed il numero sulla parte corrispondente nel diagramma e così per tutte le parti della presentazione. Se il soggetto sbaglia viene corretto.

Successivamente al soggetto sono presentati i problemi uno alla volta; viene chiesto di leggere a voce alta ciascun problema, di mettere i nomi e i numeri nella presentazione e dire l'operazione necessaria per risolvere il problema stesso. Viene precisato che non ha importanza eseguire il calcolo ma solo dire l'operazione.

Gruppo 3 (DVM senza procedura) - I soggetti hanno a disposizione il DVM e inoltre viene loro presentata una semplice spiegazione del significato delle varie parti della presentazione grafica (vedi appendice 2B), che tuttavia non costituisce una procedura per il suo utilizzo. Per assicurarsi che il soggetto abbia capito, al soggetto viene richiesto di usare il materiale grafico, in modo uguale a quanto esposto per il gruppo 2. Viene poi chiesto

ai soggetti di risolvere i problemi, secondo le stesse modalità viste in precedenza.

Gruppo 4 (Proposizionale con procedura) - I soggetti sono sottoposti ad un addestramento (vedi appendice 2C) in cui imparano una procedura simile a quella del gruppo 2, ma in termini esclusivamente verbali in quanto non hanno a disposizione nessun tipo di presentazione grafica. Non si tratta di una spiegazione generica ma di un addestramento che sottolinea una serie di passi da compiere, giungendo in questo modo a rappresentare in termini simbolici lo stesso stato di cose che con il DVM emerge visivamente. Per assicurarsi che il soggetto abbia capito, al soggetto vengono poste domande relative alle quattro parti, in modo da rendere l'addestramento anche sotto questo profilo equivalente a quello fornito ai soggetti del gruppo 2 (Ad esempio: "Se dico che Anastasia ha delle caramelle in più di Roberta, a quali caramelle mi riferisco?"). Se il soggetto sbaglia viene corretto. Viene poi chiesto ai soggetti di risolvere i problemi, secondo le stesse modalità viste in precedenza, esclusi i riferimenti alla presentazione grafica.

Gruppo 5 (Più grafici) - Le tre presentazioni (DVM, diagramma ad albero, grafo vettoriale - vedi appendice 3), vengono fornite ai soggetti una alla volta. Contestualmente alla presentazione di ciascun grafico si ha l'apprendimento di una procedura relativa al suo uso, nella quale viene specificato quali passi compiere (considerare parti, collocarvi numeri) e in quale ordine (vedi appendice 2D). Per assicurarsi che abbia capito, vengono fatte delle prove simili a quelle del gruppo 2, in cui al soggetto, sulla base di un enunciato (ad es. "Anastasia ha 7 caramelle" oppure "Anastasia ha 3 caramelle in più di Roberta") viene richiesto di collocare un numero sulla parte appropriata, utilizzando - una alla volta - tutte e tre le presentazioni grafiche. Se il soggetto sbaglia viene corretto. Per la successiva parte di soluzione dei problemi i soggetti hanno a disposizione il materiale grafico comprendente le tre presentazioni e possono scegliere quale o quali usare.

Risultati e discussione

Presentazione e procedura

Nella prima analisi sono stati presi in considerazione i primi 4 gruppi. In tab. 1, dove è riportato il numero medio di problemi risolto dai soggetti per ciascun gruppo, è evidenziato anche il trattamento ricevuto dai gruppi in relazione alle variabili *presentazione e procedura*.

I risultati dell'ANOVA condotta su questi dati sono esposti nella tab. 2.

Da questa analisi emerge chiaramente l'effetto dell'aver a disposizione una procedura: infatti la migliore performance è stata riportata dai due gruppi che hanno avuto l'addestramento procedurale (i gruppi 2 e 4) e la

procedura si rivela la variabile statisticamente significativa, mentre non lo è la presentazione grafica, né l'interazione.

Tabella 1 - Numero medio di problemi risolti (fra parentesi è indicata la deviaz. standard)

Presentazione	Procedura		
	NO	SI	
Grafica	gruppo 3	gruppo 2	3.83 (1.85)
	2.95 (1.73)	4.70 (1.56)	
Proporzionale	gruppo 1	gruppo 4	3.68 (1.44)
	3.35 (1.42)	4.00 (1.41)	
	3.15 (1.58)	4.35 (1.51)	3.75 (1.65)

Tabella 2 - Analisi della varianza (variabile dipendente: problemi risolti)

Origine della variazione	Somma dei quadrati	g.l.	Varianza	F	Signif. di F
Effetti principali:					
presentaz. (grafica/prop.le)	0.450	1	0.450	0.190	0.664
procedura (si/no)	28.800	1	28.800	12.180	0.001
Interazione:					
presentaz. x procedura	6.050	1	6.050	2.559	0.114

I risultati sembrano indicare che il fatto di avere a disposizione una presentazione grafica, se non si ha anche a disposizione una procedura che indichi come utilizzare le informazioni visive, di per sé non aiuta ma anzi può ostacolare la soluzione. Questa conclusione è avvalorata dal fatto che il gruppo 3, che ha avuto la presentazione grafica ma non la procedura, ha conseguito risultati peggiori rispetto al gruppo 1 (controllo) che pure aveva semplicemente la tradizionale presentazione verbale. Ciò suggerisce una risposta positiva alla domanda, posta fra le ipotesi, se la performance sia facilitata da una presentazione grafica abbinata all'insegnamento di una procedura.

Un altro elemento risultante dall'esperimento, che inviterebbe a dare invece una risposta negativa alla domanda se sia sufficiente la disponibilità di presentazioni grafiche per facilitare la soluzione, oltre all'assenza di

significatività della variabile *presentazione*, è il fatto che i soggetti che oltre al grafico avevano la procedura (gruppo 2) hanno conseguito i risultati migliori in assoluto, mentre coloro che avevano il grafico ma non la procedura (gruppo 3) i risultati peggiori in assoluto.

Effetto delle istruzioni

Oltre che alle più macroscopiche differenze di trattamento (possibilità di avere o no a disposizione il grafico) le differenze fra i gruppi sono dovute ovviamente anche alle istruzioni. Data la difficoltà di rendere le istruzioni date ai vari gruppi esattamente equivalenti sotto ogni profilo, non si può escludere che alcune differenze possano essere dovute a qualche facilitazione implicita nella formulazione anche linguistica delle stesse. Tuttavia, considerando che le istruzioni venivano lette ed usate come guida ma non erano disponibili ai soggetti durante la prova, si può ritenere che gli effetti siano stati legati più all'impostazione complessiva delle istruzioni stesse (orientate alla procedura, al "cosa fare" per arrivare alla rappresentazione della situazione, oppure alla semplice descrizione delle parti del grafico), che a specifiche, singole affermazioni in esse contenute.

In ogni caso la prestazione del gruppo 1 rispetto al gruppo 3 non può essere attribuita a facilitazioni dovute alle istruzioni, che avrebbero dovuto se mai riguardare il gruppo 3. Infatti per tale gruppo le spiegazioni fornite a corredo del grafico (v. Appendice 2) erano chiare e sufficienti a individuare le parti rilevanti (quelle del personaggio che ha di più, quelle di chi ha di meno, le parti corrispondenti) e gli aspetti della situazione rilevanti (l'uguaglianza fra parte 1 e parte 3, il fatto che nella parte 4, detta "in meno", non ci sono caramelle, ecc.).

Difficoltà dei problemi

E' stato compiuto un controllo allo scopo di valutare se le differenze di trattamento incidessero sulle prestazioni a seconda della struttura o della difficoltà dei problemi. Si è preso in esame a questo fine il numero di singoli problemi risolti dai vari gruppi (v. tab. 3). Nel complesso i risultati non si discostano dalla performance attesa ($\chi^2 = 16.99$, d.f. 15, non sig.) in relazione alla difficoltà del problema.

L'unico evidente effetto del trattamento a questo proposito riguarda la soluzione dei problemi 1 e 2 per il gruppo 2. Questo tipo di problemi, definito generalmente (seguendo Riley, Greeno e Heller, 1983) come quello in cui è sconosciuto l'insieme di riferimento (*referent unknown*), è stato ripetutamente identificato come il più difficile fra quelli di confronto (Riley *et al.* 1983; Morales *et al.*, 1985; Riley e Greeno, 1988; Dellarosa *et al.*, 1988; Stern e Lehrndorfer, 1992). Tuttavia le ipotesi per spiegare questo fatto (v. Stern, 1993 per un inquadramento) sono state spesso del

tutto generali, applicabili anche agli altri problemi di confronto (i soggetti prenderebbero le espressioni “in più” o “in meno” come parole-chiave indicanti sommare o sottrarre oppure come sinonimi di “molti” o “pochi”; non capirebbero che dire che l’insieme A contiene *meno* oggetti di B equivale a dire che B contiene *più* oggetti di A). L’unica ipotesi specificamente riferibile ai problemi con *referent unknown* è che la difficoltà dipenda dall’uso, nella seconda frase, del pronome personale “lui” o “lei” al posto della ripetizione del nome del primo personaggio (in alcune formulazioni dei problemi - non nelle nostre), ma la stessa Stern ha confutato questa ipotesi.

Anche nel nostro esperimento tali problemi sono risultati i più difficili per tutti i soggetti, ma non per il gruppo 2, per il quale addirittura il problema 2 è il più facile. Una facilitazione si evidenzia anche nel gruppo 4, specialmente per il problema 1. Questo risultato è interessante e si spiega considerando il fatto che i problemi 1 e 2 richiedono di trovare ciò che possiede un personaggio per il quale non sono fornite direttamente nel testo informazioni numeriche. Un tale tipo di testo è formulato in modo fuorviante dal punto di vista della coerenza discorsiva (ad es. nel problema 2 il *focus* è posto due volte sulle caramelle di Roberta ma è su quelle di Anastasia che poi verte la domanda). La difficoltà testuale si combina con il fatto che, essendo l’attenzione centrata su un unico personaggio, è chiamato in causa un unico insieme, e quindi la necessità di rappresentarsi un altro insieme da mettere in corrispondenza con il primo non nasce dal testo, come è più probabile che avvenga quando le informazioni quantitative fornite riguardano due personaggi a ciascuno dei quali è attribuibile un distinto insieme di oggetti. Un’elaborazione solo proposizionale di tali testi, dunque, è probabilmente ostacolata dalla maggior richiesta di processi inferenziali che invece non sono necessari quando è disponibile una *procedura*, da cui emerge automaticamente quali insiemi prendere in considerazione. Per questo motivo nei gruppi 2 e 4, che avevano l’addestramento procedurale, si evidenzia una facilitazione, potenziata quando è disponibile anche un grafico, che consente di operare il confronto su basi di corrispondenza analogica.

Presentazioni grafiche multiple

La prestazione del gruppo 5 è stata considerata in modo diverso. Ricordiamo che tale gruppo ha avuto, come il gruppo 2, un addestramento procedurale ma anziché far uso di una sola presentazione grafica (il DVM) aveva a disposizione tre diversi grafici. Ai soggetti del gruppo 5 sono stati proposti soltanto due dei 6 problemi affrontati dagli altri soggetti, precisamente i primi due (*referent unknown*). Il confronto con la prestazione degli altri gruppi è stato ovviamente fatto solo su questi due problemi, che sono - come abbiamo appena visto - i più difficili. Nella tab.

4 è presentato il numero medio di problemi risolto nei diversi gruppi (tale numero può andare da 0 a 2 per tutti i gruppi, compreso il gruppo 5 per il quale il numero complessivo di problemi risolto è stato diviso per 3).

Tab. 3 - Numero di problemi risolti

Probl.	Gruppi				Totale
	1	2	3	4	
1	7	14	5	12	38
2	4	19	3	8	34
3	11	15	12	14	52
4	17	14	14	18	63
5	12	17	12	13	54
6	16	15	13	15	59
Totale	67	94	59	80	300

Tabella 4 - Numero medio di problemi (1 e 2) risolti (fra parentesi è indicata la deviaz. standard)

Presentazione	Procedura		
	NO	SI	
Nessun grafico	gruppo 1	gruppo 4	0.78 (0.75)
	0.55 (0.60)	1.00 (0.79)	
Solo DVM	gruppo 3	gruppo 2	1.02 (0.83)
	0.40 (0.60)	1.65 (0.49)	
Più grafici	—	gruppo 5	0.98 (0.56)
		0.98 (0.56)	
	0.48 (0.60)	1.21 (0.69)	0.92 (0.75)

L'ANOVA (tab. 5) indica che le differenze fra i gruppi sono significative sia per effetto della presentazione (proposizionale, DVM o più grafici) che della disponibilità o no della procedura. La significatività delle differenze fra le medie, al livello 0.05, è stata valutata con il test di Newman-Keuls. Mentre il gruppo 2 differisce significativamente da tutti gli altri, il gruppo 5 differisce solo dai gruppi 3 e 1, corrispondenti al trattamento *senza procedura* (è significativa anche la differenza fra i gruppi

3 e 4). Possono essere formati tre sottogruppi omogenei di medie (calcolati con l'SPSS, tali che la differenza fra le medie più alta e più bassa non sia maggiore di quella del più piccolo intervallo significativo per un sottoinsieme di tale grandezza): il primo comprende i gruppi 3 e 1 (senza procedura), il secondo i gruppi 5 e 4 (procedura con nessun grafico o con pluralità di grafici), il terzo il gruppo 2 (procedura con DVM).

Tabella 5 - Analisi della varianza (variabile dipendente: problemi 1 e 2 risolti)

Origine della variazione	Somma dei quadrati	g.l.	Varianza	F	Signif. di F
Effetti principali:					
present. (prop.le/DVM/più graf.)	2.832	2	1.416	3.720	0.028
procedura (si/no)	14.450	1	14.450	37.952	0.000
Interazione:					
presentaz. x procedura	3.200	1	3.200	8.405	0.005

Questa analisi indica in modo chiaro che i soggetti che avevano a disposizione *più* grafici hanno conseguito risultati uguali a quelli di coloro che non avevano *nessun* grafico ma avevano - come loro - l'addestramento procedurale, a cui vanno sostanzialmente attribuiti i punteggi di livello intermedio. L'indicazione che risulta dall'esperimento è che per questi problemi l'aver una *procedura* da seguire fornisce una facilitazione decisiva; l'aver a disposizione *una sola* presentazione grafica costituisce un beneficio aggiuntivo, mentre averne più di una non ha la stessa efficacia. Probabilmente, nella condizione in cui vengono offerte diverse presentazioni grafiche, ciascuna connessa ad una propria procedura, non si verifica un automatico *transfer* delle informazioni collegate ai diversi tipi di grafico né una loro rielaborazione in un modello unico⁹. Non sembra che sia né il tipo né la quantità delle presentazioni grafiche a garantire automaticamente la costruzione di rappresentazioni di ordine più complesso ma che molto dipenda dalla possibilità di avere strumenti procedurali per catturare le relazioni esistenti nei grafici (e quindi applicarle in modo isomorfo al modello della situazione).

Evidentemente nel considerare questo risultato bisogna tener conto del fatto che le osservazioni condotte nella condizione di pluralità di grafici sono state limitate a problemi del tipo *referent unknown*, di cui abbiamo

⁹ D'altra parte, ciascuna di queste presentazioni pone in risalto una diversa caratteristica della situazione problematica: il DVM identifica le singole parti e ne permette il confronto, il DA sottolinea l'aspetto gerarchico dei vari insiemi, il GV specifica in quale direzione avviene l'evoluzione della situazione stessa.

visto la difficoltà e le particolari caratteristiche, e del fatto - conseguente a tale limitazione - che la base empirica nel confronto con gli altri gruppi è stata necessariamente ridotta. Inoltre, più in generale, potrebbe essere necessario studiare in che modo le figure inducono la relativa procedura e se in questo possano rivelare un diverso grado di trasparenza. Appare certamente opportuno eseguire altre indagini empiriche mirate ad esplorare l'effetto di presentazioni grafiche, singole e multiple, in maniera più diretta e sistematica, ampliando la quantità e qualità delle osservazioni e comprendendo anche problemi di diverso tipo.

Conclusioni

In questo articolo abbiamo presentato un'indagine riguardante i processi cognitivi che danno efficacia all'uso di presentazioni grafiche nella soluzione di problemi aritmetici. È stata sviluppata una discussione teorica iniziale a sostegno del presupposto che le presentazioni grafiche si integrano con le informazioni proposizionali ricavate dal testo del problema in virtù di procedure di controllo. Si è dunque ipotizzato che avere a disposizione presentazioni grafiche di per sé non aiuta a risolvere i problemi, se non si hanno anche conoscenze procedurali che indichino in che modo gli elementi rilevanti della situazione possano essere rappresentati.

L'esperimento compiuto suggerisce una conferma di queste ipotesi, in quanto i soggetti che per la soluzione di problemi di differenza hanno avuto a disposizione presentazioni grafiche della situazione sono stati facilitati solo quando è stato loro presentato anche un modello procedurale di decodificazione e rappresentazione degli elementi contenuti nei grafici stessi. Non si può interpretare questo risultato come un effetto di facilitazione dovuto al semplice fatto di fornire insieme alla procedura chiarimenti concettuali sulla strategia da seguire, in quanto tale effetto non c'è stato per i soggetti che hanno avuto istruzioni procedurali di natura solo verbale, senza l'uso di grafici.

Inoltre, a margine di una diffusa tendenza didattica, ci si è chiesto se avere a disposizione una *pluralità* di presentazioni grafiche possa servire per una migliore comprensione della situazione problematica. Il confronto - fatto riguardo a due soli problemi - indica che la prestazione nella situazione in cui si hanno diversi grafici non è diversa da quella in cui non se ne ha nessuno, salvi gli effetti facilitanti dell'addestramento procedurale.

Le procedure utilizzate in questa ricerca, per motivi pratici, hanno dovuto essere parzialmente appoggiate su manipolazioni concrete di contrassegni simbolici. Tuttavia non vogliono essere in nessun modo "metodi didattici" (anche se possono essersi rivelati efficaci in questo senso) ma solo strumenti di ricerca. Il nostro problema era più complesso della ricerca di strumenti didattici. Intanto perché, come si è già chiarito, qui

non si tratta di procedure nel senso di “algoritmi” per la soluzione, ma di strumenti per lo studio dell'integrazione iconico-proposizionale a livello rappresentativo (i contrassegni simbolici sono concreti e astratti allo stesso tempo, hanno una posizione spaziale come le immagini ma anche un riferimento come le proposizioni). In secondo luogo, nella pratica occorre tener conto del fatto che il bambino già usa qualche procedura “naturale” quando si accosta a compiti cognitivi che abbiano qualche somiglianza con compiti già sperimentati in precedenza.

Appendice 1 - Testi dei problemi

N.B. I testi dei problemi 1 e 2 seguiti dalle lettere A,B,C sono le forme alternative dei primi due problemi usate per il gruppo 5.

1. Anastasia ha 7 caramelle.
Anastasia ha 4 caramelle più di Roberta.
Quante caramelle ha Roberta?
2. Roberta ha 4 caramelle.
Roberta ha 2 caramelle meno di Anastasia.
Quante caramelle ha Anastasia?
3. Anastasia ha 8 caramelle.
Roberta ha 5 caramelle.
Quante caramelle ha Anastasia più di Roberta?
4. Anastasia ha 7 caramelle.
Roberta ha 2 caramelle.
Quante caramelle ha Roberta meno di Anastasia?
5. Roberta ha 6 caramelle.
Anastasia ha 2 caramelle più di Roberta.
Quante caramelle ha Anastasia?
6. Anastasia ha 9 caramelle.
Roberta ha 4 caramelle meno di Anastasia.
Quante caramelle ha Roberta?
- 1A. Anastasia ha 7 caramelle.
Anastasia ha 4 caramelle più di Roberta.
Quante caramelle ha Roberta?
- 2A. Roberta ha 4 caramelle.
Roberta ha 2 caramelle meno di Anastasia.
- Quante caramelle ha Anastasia?
- 1B. Anastasia ha 9 caramelle.
Anastasia ha 5 caramelle più di Roberta.
Quante caramelle ha Roberta?
- 2B. Roberta ha 2 caramelle.
Roberta ha 5 caramelle meno di Anastasia.
Quante caramelle ha Anastasia?
- 1C. Anastasia ha 8 caramelle.
Anastasia ha 3 caramelle più di Roberta.
Quante caramelle ha Roberta?
- 2C. Roberta ha 6 caramelle.
Roberta ha 2 caramelle meno di Anastasia.
Quante caramelle ha Anastasia?

Appendice 2 - Testi delle istruzioni

Le parole in corsivo indicano i gesti compiuti in riferimento alla presentazione grafica. Le lettere in grassetto si riferiscono alle informazioni fornite dalle singole parti delle istruzioni (v. tavola I).

A. Procedura per l'uso del DVM (gruppo 2)

Ora leggerai dei problemi e dovrai risolverli aiutandoti con questi disegni (*si indica la presentazione grafica*). Prima che tu legga i problemi ti insegno come si usano. Nei problemi ci sono sempre due personaggi: io, che mi chiamo Roberta, e Anastasia, che abbiamo delle caramelle. Facciamo che Anastasia ha più caramelle di me: allora possiamo dire che le sue caramelle sono tutto questo (*si indicano le parti 1 e 2*) (**A**) che come vedi è più grosso di questo (*si indica la parte 3*). Le mie caramelle, invece, che sono di meno, sono questo (*si indica la parte 3*) che è più piccolo. In questo che è più grosso scriviamo Anastasia (*si colloca il nome ANASTASIA sulle parti 1 e 2*) perché ha più caramelle; in questo che è più piccolo scriviamo Roberta perché io ho meno caramelle (*si colloca il nome ROBERTA sulla parte 3*). Io ho meno caramelle di Anastasia: infatti come vedi qui dove lei ha le caramelle in più (*parte 2*) io non ho niente (*si indica la parte 4*) (**C**); le caramelle che io ho in meno sono tante quante. Anastasia ne ha in più (**D**).

Quindi qui (*si indica la parte 3*) devi mettere il nome del personaggio che ha meno caramelle e il numero delle caramelle che ha; qui (*si indicano le parti 1 e 2*) devi mettere il nome del personaggio che ha più caramelle e il numero delle caramelle che ha lo metterai qui (*si indica il rettangolino tratteggiato che si trova fra le parti 1 e 2*) perché queste (*si indicano le parti 1 e 2*) sono tutte sue caramelle. Qui (*si indicano le parti 1 e 3*) devi mettere il numero delle caramelle che abbiamo entrambe, qui (*si indica la parte 2*) il numero delle caramelle che Anastasia ha in più, qui (*si indica la parte 4*) il numero delle caramelle che io ho in meno, che è lo stesso (**D**).

B. Spiegazioni relative alle parti del DVM (gruppo 3)

Ora leggerai dei problemi e dovrai risolverli aiutandoti con questi disegni (*si indica la presentazione grafica*). Prima che tu legga i problemi ti insegno come si usano. Nei problemi ci sono sempre due personaggi: io, che mi chiamo Roberta, e Anastasia, che abbiamo delle caramelle. Facciamo che Anastasia ha più caramelle di me.

Tutto questo (*si indicano le parti 1 e 2*) che, come vedi, è più grosso, sono le caramelle di chi ne ha di più (**A**). Mentre questo (*si indica la parte 3*) che è più piccolo sono le caramelle di chi ne ha di meno.

Questa parte (*si indica la parte 1*) è uguale a questa (*si indica la parte 3*) (**B**). Invece questa parte (*si indica la parte 2*) è in più, cioè sono le caramelle in più, ed è uguale a questa (*si indica la parte 4*) che è in meno (**D**), infatti come vedi qui non ci sono caramelle (**C**).

C. Procedura proposizionale (gruppo 4)

Ora leggerai dei problemi e dovrai risolverli in un modo che ti spiegherò io. Nei

problemi ci sono sempre due personaggi: io, che mi chiamo Roberta, e Anastasia, che abbiamo delle caramelle.

1) Per prima cosa pensiamo a chi ha più caramelle. Facciamo che Anastasia ha più caramelle di me: allora possiamo dire che lei ha tante caramelle quanto me più delle altre (**A**). Anastasia ha più caramelle perché ne ha un certo numero quante ne ho io (**B**) e un altro numero in più (**A**).

2) Pensiamo ora a chi ha meno caramelle. Sono io. Se ho meno caramelle di Anastasia, ho alcune caramelle quanto lei (**B**), poi ci sono altre caramelle che lei ha in più e che io non ho (che ho in meno) (**C**).

3) Pensiamo ora alle caramelle. Alcune caramelle che ha Anastasia sono tante quante le mie (**B**), ma lei ne ha altre in più (**A**). Queste caramelle che lei ha in più io non le ho (**C**), ed è il numero di caramelle che io ho in meno (**D**).

Devo dirti ancora una cosa: quando dico che Anastasia ha delle caramelle, mi riferisco a tutte le caramelle di Anastasia. Quando invece dico che Anastasia ha delle caramelle in più di Roberta, mi riferisco solo alle caramelle che lei ha e che io non ho. Anche quando dico che Roberta ha delle caramelle in meno di Anastasia, mi riferisco alle caramelle che Anastasia ha in più e che io non ho (**C**).

D. Procedura per l'uso di presentazioni grafiche multiple (gruppo 5)

Per quanto riguarda la parte relativa al DVM la procedura è identica a quella del gruppo 2.

Con riferimento al diagramma ad albero (DA), invece delle parti 1 e 2 si indica la posizione 1, invece della parte 3 si indica la posizione 2, invece della parte 4 si indica la posizione 3. Con il grafo vettoriale (GV) si fa riferimento al segmento risultante dalla somma dei tratti 1 e 2 per indicare la quantità maggiore e ai tratti 1 e 2 per indicare, rispettivamente, le parti contrassegnate nel DVM come 3 e 4. Sia con il DA che con il GV sono eliminate le dizioni relative alle parti "più grosse" o "più piccole".

Appendice 3 - Presentazioni grafiche

Diagramma di Venn modificato (DVM)

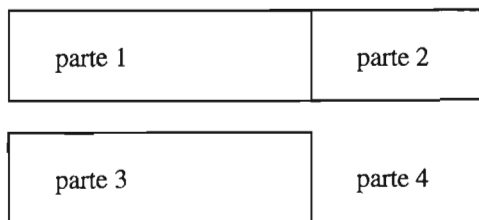
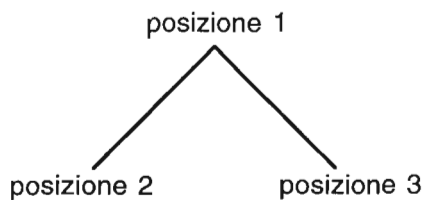
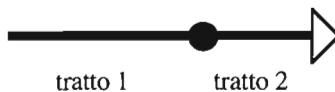


Diagramma ad albero (DA)



Grafo vettoriale (GV)



Riassunto

L'indagine riguarda il ruolo della rappresentazione iconica (che raffigura relazioni in modo concreto, diretto, spaziale) nella soluzione di problemi aritmetici. L'articolo comprende una parte teorica ed una empirica. Nella parte teorica viene evidenziato come la maggioranza delle ricerche abbia sottolineato il ruolo degli aspetti proposizionali nella rappresentazione di tali problemi, nonostante sia riconosciuta l'efficacia di presentazioni grafiche o pittoriche. Nell'ambito più generale del *problem solving*, è ipotesi comune che questa efficacia sia dovuta al fatto di indurre una codifica per immagini, ma rimane poco chiaro in che modo le informazioni grafiche siano trasformate in rappresentazioni iconiche e utilizzate come rilevanti per la situazione problematica. Viene qui discussa la possibilità che ciò avvenga attraverso una diretta traduzione in termini proposizionali; si ritiene preferibile l'ipotesi di un sistema di rappresentazione in cui aspetti proposizionali ed iconici sono integrati attraverso l'uso di *procedure*, intese come processi di controllo.

Nella seconda parte viene presentato un esperimento volto ad esplorare se e come l'addestramento all'uso di procedure abbinate alle presentazioni grafiche possa facilitare la soluzione di problemi aritmetici. L'esperimento è stato eseguito con bambini di 6-7 anni, utilizzando problemi di *differenza*. Sono state manipolate la modalità di presentazione dei problemi (uso di grafici o solo verbale) e il fatto di fornire o no procedure che specificavano passi da compiere per giungere ad una rappresentazione della situazione. Risulta che la performance dipende essenzialmente dalla disponibilità dei modelli procedurali; le presentazioni grafiche potenziano l'effetto delle procedure ma da sole non hanno efficacia. Risulta inoltre che, almeno per un certo tipo di problemi, avere una pluralità di presentazioni grafiche non facilita la prestazione.

Summary

This paper concerns how iconic (concrete, direct, spatially-based) representation affects arithmetic problem solving. In research on arithmetic problems propositional aspects of representation have been underscored, whereas the effectiveness of graphical or pictorial presentations is widely recognized. To explain this effectiveness, in general research on *problem solving* the hypothesis has been made that imaginal encoding takes place, but how graphical information be transformed in iconic representation and used as relevant for the situation problem is still unclear. It is argued that the assumption of a direct translation in propositional terms is best replaced by the hypothesis of a representation system where propositional and iconic aspects are integrated. Such integration relies on *procedures*, as control processes.

An experiment has been carried out with 6-7 year-olds, using *difference* problems, in order to analyze graphical presentations and procedural training impact on situation representation. Results show that performance depends mainly on the availability of procedural models and that graphical presentations boost the procedure effect, but are not adequate by themselves. In addition, having a plurality of graphical presentations, at least for some problems, does not make the task easier.

Bibliografia

- Anderson J.R., 1983. *The architecture of cognition*. Harvard University Press, Cambridge, Mass..
- Antonietti A., 1989. Il ruolo delle immagini mentali nel "problem solving". *Archivio di Psicologia, Neurologia, Psichiatria*, 50, 61-86.
- Antonietti A., 1991. Why does mental visualization facilitate problem-solving?, in: Logie R.H., Denis M. *Mental images in human cognition*, North-Holland, Amsterdam.
- Antonietti A., Angelini C., 1991. Figure schematiche e soluzione di problemi. *Archivio di Psicologia, Neurologia, Psichiatria*, 52, 1, 7-26.
- Bobrow D.G., 1968. Natural language input for a computer problem-solving system, in: Minsky M. (ed.): *Semantic information processing*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- Boero P., 1986. Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 9, 9, 48-93.
- Briars D.J., Larkin J.H., 1984. An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.
- Calidoni P., 1989. *Indagini*, vol. III. La Scuola, Brescia.
- Craighero G., 1971. *Per una didattica psicologica delle operazioni aritmetiche nei problemi della scuola elementare*. Giunti Barbèra, Firenze.
- Davis R.B., 1984. *Learning mathematics. The cognitive science approach*. Croom Helm, London-Sydney.
- Dellarosa Cummins D., Kintsch W., Reusser K., Weimer R., 1988. The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.
- Denis M. 1990. Imagery and thinking, in: Cornoldi C., Mac Daniel M. (eds.): *Imagery and cognition*, Springer, New York.
- Fodor J.A., 1975. *The language of thought*. Crowell, New York.
- Gentner D., Stevens A.L. (eds), 1983. *Mental models*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.

- Giusberti F., 1984. Il modello proposizionale e il modello analogico nel recente dibattito sull'immagine mentale. *Ricerche di Psicologia*, 3, 38-59.
- Greco A., 1988. *Introduzione alla simulazione come metodologia di ricerca in psicologia*. Angeli, Milano.
- Greco A., 1990. Processi cognitivi fondamentali nella rappresentazione e soluzione di problemi aritmetici: un modello simulativo. *Contributi di Ricerca in Psicologia e Pedagogia*, Dipartim. di Filosofia, Università di Genova.
- Greco A., 1994. Integrating "different" models in cognitive psychology. *Cognitive Systems*, 4-1, in corso di pubbl.
- Greeno J.G., 1987. Instructional representations based on research about understanding, in: Schoenfeld A.H. (ed.): *Cognitive science and mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.
- Gruppo Armand Young, 1990. Logica dell'aritmetica. *Via libera alla scuola che cambia*, II, 10, 35-38.
- Johnson-Laird P.N., 1983. *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press. Trad. it: *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna, 1988.
- Kintsch W., 1988. The role of knowledge in discourse comprehension: a construction-integration model. *Psychological Review*, 95, 163-182.
- Kintsch W., Greeno J.G., 1985. Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.
- Kosslyn S.M., 1980. *Image and mind*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Larkin J.H., Simon H.A., 1987. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 10, 65-100.
- Lesh R., 1985. Conceptual analyses of problem-solving performance, in: Silver E.A. (ed.): *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.Y..
- Lewis A.B., Mayer R.E., 1987. Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.
- Mandl H., Levin J.R. (eds), 1989. *Knowledge acquisition from text and pictures*. Amsterdam: North-Holland.
- Mariotti M.A., 1986. L'approccio psicologico nella didattica della matematica.

- Mayer R.E., 1985. Mathematical ability, in: Sternberg R.J. (ed.): *Advances in the psychology of human intelligence*, vol. 2, pp.231-273, Freeman, S.Francisco.
- Mayer R.E., 1993. Comprehension of graphics in texts: an overview. *Learning and Instruction*, 3, 239-245.
- Mayer R.E., Gallini J.K., 1990. When is an illustration worth ten thousand words? *Journal of Educational Psychology*, 82, 715-726
- Moore P.J., 1993. Metacognitive processing of diagrams, maps and graphs. *Learning and Instruction*, 3, 215-226.
- Morales R.V., Shute V.J., Pellegrino J.W., 1985. Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction*, 2, 41-57.
- Newell A., Simon H.A., 1972. *Human problem solving*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..
- Orton A., 1987. *Learning mathematics*. Cassell, London.
- Paivio A., 1971. *Imagery and verbal processes*. Holt, Rinehart, & Winston, New York.
- Paivio A., 1986. *Mental representations: a dual coding approach*. Oxford University Press, New York.
- Pellerey M., 1987. Psicologia cognitiva e attività didattica. *Orientamenti Pedagogici*, 34, 93-111.
- Perrig W., Kintsch W., 1985. Propositional and situational representations of text. *Journal of Memory and Language*, 24, 503-518.
- Polyshyn Z.W., 1984. *Computation and cognition. Toward a foundation for Cognitive Science*. MIT Press, Cambridge, Mass.
- Riley M.S., Greeno J.G., Heller J.I., 1983. Development of children's problem solving ability in arithmetic, in: Ginsburg H.P. (ed.): *The development of mathematical thinking*, Academic Press, New York.
- Riley M.S., Greeno J.G., 1988. Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5, 49-101.
- Schnotz W. (ed.), 1993. Comprehension of graphics in texts. *Learning and Instruction*, 3

(Spec. Issue).

- Shanon B., 1993. *The representational and the presentational. An essay on cognition and the study of mind.* Harvester Press, Brighton.
- Shepard R.N., 1975. Form, formation, and transformation of internal representations, in: Solso R.L. (ed.): *Information processing in cognition: the Loyola Symposium*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.Y.
- Shiffrin R.M., Schneider W., 1977. Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. *Psychological Review*, 84, 2, 127-190.
- Stern E., 1993. What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children?. *Journal of Educational Psychology*, 85, 7-23.
- Stern E., Lehrndorfer A., 1992. The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, 7, 259-268.
- Tye M., 1991. *The imagery debate.* Bradford (MIT Press), Cambridge, Mass.
- Van Dijk T.A., Kintsch W., 1983. *Strategies of discourse comprehension.* Academic Press, New York.
- Vergnaud G., 1986. Topic area: psychology of mathematics education, in: Carss M. (ed.): *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*, Birkhäuser, Boston.
- Verschaffel L., De Corte E., Pauwels A., 1992. Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, 84, 85-94.
- von Glaserfeld E., 1987. Preliminaries to any theory of representation, in: Janvier C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.
- Willis G.B., Fuson K.C., 1988. Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, 80, 192-201.